

appunti del corso di
Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare

prof. Filippo Ceradini
anno accademico 2001-2002

January 3, 2003



Dipartimento di Fisica "Edoardo Amaldi"
via della Vasca Navale 84, I - 00146 Roma

Corso di Laurea in Fisica

Cari studenti,

questi sono gli appunti delle lezioni del corso di *Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare* tenute fino all'anno accademico 2001-02, l'ultimo anno del vecchio ordinamento del corso di Laurea in Fisica all'Università Roma Tre.

A partire dal 2003 questo corso è stato sostituito da due corsi, uno nel terzo anno della Laurea Triennale: *Elementi di Fisica Nucleare e Subnucleare*, e l'altro nel primo anno della Laurea Specialistica: *Complementi di Fisica Nucleare e Subnucleare*. Comunque gli argomenti trattati nei due corsi non sono sostanzialmente diversi da quelli del corso precedente, è cambiato un po' l'ordine di presentazione degli argomenti, e alcuni ora vengono trattati in altri corsi "a scelta".

Gli appunti sono divisi in **1**-Metodologie, **2**-Fisica Nucleare, **3**-Fisica Subnucleare, e sono corredati da appendici, alcune sono richiami di argomenti già trattati nei corsi della Laurea Triennale, altre sono approfondimenti di argomenti trattati nei corsi dell'indirizzo di Fisica Subnucleare della Laurea Specialistica. L'intendimento è quello di uniformare definizioni, simboli e formule a quelli usati in queste lezioni.

Questi appunti *non* possono sostituire un buon libro di testo perché gli argomenti sono trattati in modo piuttosto schematico senza curare le connessioni logiche, le figure non sono di buona qualità, mancano i riferimenti bibliografici, etc..., e soprattutto perché *non* vogliono sostituire i libri di testo, ma unificare più argomenti che sono trattati in testi diversi. Siete quindi caldamente invitati a studiare sui libri, e ce ne sono di ottimi. Buono studio,

Filippo Ceradini

Quindi il flusso di energia della radiazione diffusa è

$$\Phi_{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a_x^2}{c^3 r^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{(mc^2)^2} \frac{\Phi_i}{r^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right)$$

Il caso di interesse è quello di un elettrone debolmente legato, quando cioè l'energia di legame non è grande rispetto all'energia della radiazione incidente $\hbar\omega$. Per un elettrone ($q = e$, $m = m_e$, $e^2/4\pi\epsilon_0 = r_e m_e c^2$) si ha

$$\Phi_{\Omega} = \Phi_i \left(\frac{r_e}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right)$$

La sezione d'urto, cioè l'area efficace del bersaglio che sottrae parte del flusso incidente e lo diffonde nell'angolo solido $d\Omega$, è

$$\Phi_i d\sigma = \Phi_{\Omega} r^2 d\Omega$$

da cui si deriva la

$$\text{sezione d'urto di Thomson} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right)$$

la sezione d'urto totale è

$$\sigma_T = r_e^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) d \cos \theta d\phi = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

L'unità di misura della sezione d'urto è il *barn*, ($1 b \equiv 10^{-24} \text{ cm}^2$). Poiché $r_e^2 = (2.82 \cdot 10^{-13} \text{ cm})^2 \approx 0.08 b$, il valore della sezione d'urto di Thomson è $\sigma_T = 0.67 b$.

1.3 Acceleratori

Gran parte della fenomenologia dei nuclei e delle particelle è basata su risultati ottenuti in esperimenti con acceleratori. In questo capitolo trattiamo brevemente i metodi di accelerazione di elettroni, protoni e nuclei, con qualche accenno ai metodi per produrre fasci secondari di altre particelle sia cariche che neutre. I metodi per accelerare particelle cariche sono basati sull'azione di campi elettrici e magnetici. L'equazione del moto è

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Il campo magnetico non compie lavoro e l'energia acquistata per unità di tempo, $W = q\vec{v} \cdot \vec{E}$, è fornita dal campo elettrico. Gli acceleratori lineari utilizzano esclusivamente campi elettrici. Campi magnetici vengono utilizzati negli acceleratori circolari e, in generale, per deflettere e per focalizzare i fasci di particelle.

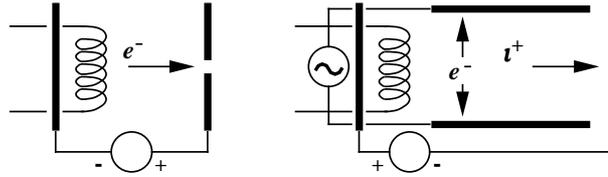


Figure 1.15: Sorgenti di elettroni e di ioni

Sorgenti di ioni

Una sorgente di elettroni è essenzialmente un filamento caldo, che emette elettroni per effetto termoionico, immerso in un campo elettrico che estrae gli elettroni e^- dalla sorgente (Fig.1.15). Allo stesso modo si realizza una sorgente di ioni positivi. Gli atomi sono immersi in una regione in cui vi è un campo elettrico alternato per accelerare gli elettroni prodotti dal filamento e un campo magnetico per farli spiralizzare. Gli elettroni cedono energia agli atomi ionizzandoli. Un campo elettrico estrae gli ioni i^+ dalla sorgente.

Il progresso degli acceleratori è fortemente legato al progresso delle tecniche di vuoto. Nelle regioni dell'acceleratore in cui viene trasportato il fascio di particelle occorre mantenere pressioni molto basse in modo da limitare l'assorbimento e la dispersione sia angolare che in energia del fascio. I fenomeni di interazione delle particelle cariche sono descritti nel capitolo ???.

1.3.1 Acceleratori a caduta di potenziale

I primi acceleratori sono stati realizzati con campi elettrici statici: una particella di carica q viene accelerata con una differenza di potenziale ΔV . L'energia massima raggiungibile con questa tecnica è limitata dalla differenza di potenziale che si può stabilire in laboratorio tra due elettrodi.

Acceleratore Van de Graaff

Il primo esempio di acceleratore elettrostatico è stato realizzato da Van de Graaff nel 1929 (Fig.1.16). La differenza di potenziale si ottiene caricando un elettrodo di capacità C per induzione elettrostatica. Una cinghia di materiale isolante passa vicino ad una punta dove vi è un intenso campo elettrico e si carica. La cinghia trasporta le cariche verso un elettrodo cavo che ha una forma il più regolare possibile per limitare le scariche. Poiché il campo elettrico all'interno dell'elettrodo conduttore è nullo, la carica trasportata si distribuisce sulla superficie. Il lavoro per caricare l'elettrodo è fornito dal moto della cinghia. Se $i(t)$ è la corrente trasportata dalla cinghia, la differenza di potenziale è $\Delta V = \int i(t) dt / C$ ed è limitata dalle perdite del dielettrico che avvolge l'elettrodo. Gli acceleratori elettrostatici sono di solito immersi in gas inerte ad alta pressione per evitare scariche. La sorgente di ioni è posta all'interno dell'elettrodo cavo e la differenza di potenziale viene ripartita, con una serie di capacità o resistenze, lungo il tubo a vuoto in cui è accelerato

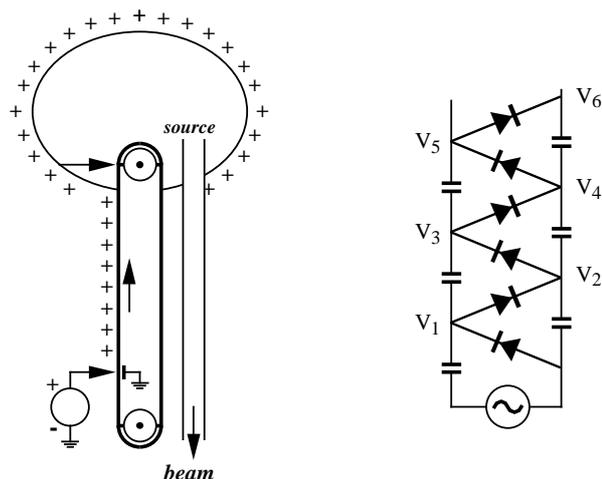


Figure 1.16: Principio di funzionamento degli acceleratori elettrostatici

il fascio. Acceleratori di Van de Graaff possono produrre differenze di potenziale $\Delta V \approx 10 \text{ MV}$ e produrre fasci di ioni con correnti di fascio $\approx 100 \mu\text{A}$ e sono comunemente utilizzati in ricerche di fisica nucleare.

Acceleratore Cockroft-Walton

Il secondo esempio di acceleratore elettrostatico è quello realizzato da Cockroft e Walton ²⁴ nel 1930 per studiare le prime reazioni nucleari in laboratorio. L'energia è fornita da un generatore alternato, $\Delta V = V_o \cos \omega t$ e la differenza di potenziale è generata da una cascata di rettificatori. Questi sono alternativamente in conduzione o in interdizione e caricano una serie di condensatori a tensioni via via crescenti. Con riferimento alla Fig.1.16, le tensioni sono $V_{2k-1} = V_o(2k - \cos \omega t)$, $V_{2k} = 2kV_o$. L'ultimo stadio è connesso a un elettrodo cavo sferico che contiene la sorgente di ioni. Le tensioni V_{2k} vengono distribuite lungo il tubo a vuoto in cui è accelerato il fascio. Acceleratori Cockroft-Walton possono produrre differenze di potenziale $\Delta V \approx 5 \text{ MV}$ con correnti $\approx 20 \mu\text{A}$. Gli acceleratori a caduta di potenziale sono comunemente usati come stadi iniziali di accelerazione e come iniettori di particelle in acceleratori più potenti.

Acceleratore Tandem

L'energia massima di uno ione può essere raddoppiata con acceleratori elettrostatici a due stadi: acceleratori Tandem. Il primo stadio è, ad esempio, realizzato con un acceleratore Van de Graaff con tensione $+V$ e le tensioni $V_k = V/k$ sono distribuite in modo crescente dalla sorgente di ioni a tensione $V = 0$ all'elettrodo carico a tensione $+V$ e in modo decrescente da questo al punto di estrazione del fascio, di nuovo a tensione $V = 0$. Consideriamo una sorgente di ioni i^- (ad esempio uno ione

²⁴ premi Nobel per la fisica nel 1951

idrogeno H^-): gli ioni vengono accelerati all'energia eV nel primo stadio e vengono fatti passare attraverso una sottile lamina che cambia lo stato di carica dello ione sottraendo i due elettroni. Gli ioni i^+ (i protoni) hanno ora una energia potenziale eV e nel secondo stadio vengono accelerati all'energia cinetica $2eV$. Acceleratori Tandem possono accelerare protoni fino ad energia cinetica $\approx 20 MeV$.

1.3.2 Acceleratori lineari

Gli acceleratori a caduta di potenziale sono limitati dalla necessità di produrre tensioni costanti molto elevate. Negli acceleratori lineari le particelle guadagnano energia con accelerazioni multiple prodotte da campi elettrici alternati. Il primo esempio di acceleratore lineare, *LINAC*, è stato sviluppato da Wideroe nel 1928. Il principio di funzionamento dell'acceleratore a *tubi a deriva* di Lawrence e Sloan (1930) è illustrato nella Fig.1.17.

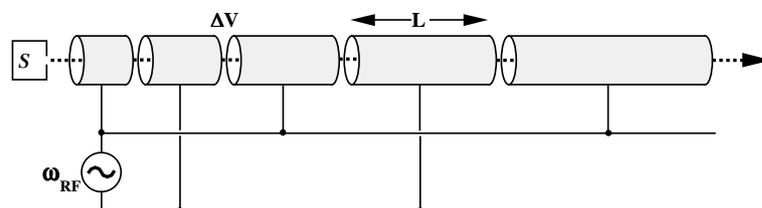


Figure 1.17: Principio di funzionamento del LINAC a tubi a deriva

Consideriamo una serie di tubi di materiale conduttore coassiali di lunghezza L_n connessi alternativamente ai capi di un generatore di tensione alternata. All'interno dei tubi il campo elettrico è nullo mentre tra un tubo e il successivo vi è una differenza di potenziale $\Delta V(t) = V_o \cos \omega t$. Una particella di carica q e massa m che procede lungo l'asse dei tubi viene accelerata nell'interspazio tra tubi consecutivi se giunge in fase con la differenza di potenziale. L'aumento di energia cinetica è $q\Delta V$. Per mantenere la relazione di fase occorre scegliere opportunamente la lunghezza dei tubi $L_n = v_n T/2$, dove T è il periodo e v_n è la velocità della particella nel tubo n .

Linac per ioni

Per velocità $v_n \ll c$ l'energia cinetica dopo il tubo n è $K_n = mv_n^2/2 = nq\Delta V$ e si ottiene

$$v_n = \left(\frac{2nq\Delta V}{m} \right)^{1/2} = cn^{1/2} \left(\frac{2q\Delta V}{mc^2} \right)^{1/2} \quad L_n = \frac{cT}{2} n^{1/2} \left(\frac{2q\Delta V}{mc^2} \right)^{1/2}$$

Poiché vengono accelerati solo gli ioni che sono in fase con ΔV , il fascio non è continuo ma si divide in *pacchetti*. *LINAC* di questo tipo vengono utilizzati per accelerare protoni e ioni con carica elevata fino a qualche decina di MeV per nucleone.

Linac per elettroni

Per elettroni si arriva rapidamente alla condizione in cui l'approssimazione non relativistica non è valida e la relazione di sopra va sostituita con

$$v_n = c (2nx)^{1/2} \frac{(1 + nx/2)^{1/2}}{1 + nx} \quad x = \frac{q\Delta V}{mc^2}$$

Per $n \rightarrow \infty$, $v_n \rightarrow c$, $L_n \rightarrow cT/2$. Per accelerare elettroni all'energia E occorre un acceleratore di lunghezza $L = (2q\Delta V/cT)E$, quindi è necessario avere un elevato gradiente di energia, $\Delta E/\Delta \ell = 2q\Delta V/cT$, aumentando la differenza di potenziale e la frequenza.

Linac RF

Nei moderni *LINAC* per elettroni la camera a vuoto è costituita da una *guida d'onda* (Fig.1.22). La cavità è realizzata in modo che risuoni alla frequenza ω_{RF} e che il

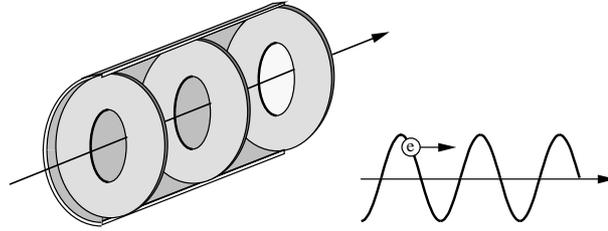


Figure 1.18: Guida d'onda del LINAC a radiofrequenza

campo elettrico sull'asse sia longitudinale. Il campo elettrico si può scomporre in due onde progressive che si propagano nelle due direzioni lungo l'asse della cavità. Poiché gli elettroni si muovono a velocità costante, $v_e \approx c$, ricevono continuamente energia dal campo elettrico se la velocità di fase dell'onda progressiva, v_f , è pari alla velocità v_e . Un'altra condizione necessaria è che i pacchetti di elettroni si mantengano in fase con l'onda progressiva; su questo torneremo più avanti.

1.3.3 Acceleratori circolari

Il moto di una particella di massa m e carica elettrica q in un campo di induzione magnetica \vec{B} è descritto dalla legge

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\gamma\vec{v} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Poiché la forza di Lorentz non compie lavoro, si ha $\gamma = costante$, $|\vec{p}| = costante$. La componente della quantità di moto parallela alla direzione di \vec{B} è invariata e la variazione della componente normale si esprime in funzione della velocità angolare

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{p} = \vec{\omega} \wedge m\gamma\vec{v} \quad \vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m\gamma}$$

La particella descrive un'elica. Nel piano normale a \vec{B} descrive una traiettoria circolare con raggio di curvatura R con frequenza di rivoluzione ω

$$\vec{p} = m\gamma \vec{\omega} \wedge \vec{R} = q\vec{R} \wedge \vec{B} \quad R = \frac{p}{qB}$$

Per una carica unitaria, $q = e$, la relazione tra quantità di moto, raggio di curvatura e campo magnetico è

$$p c [\text{Joule}] = e c B R = 1.6 \cdot 10^{-19} [\text{Coulomb}] 3 \cdot 10^8 [\text{ms}^{-1}] B [\text{Tesla}] R [\text{metro}]$$

ovvero, in unità più pratiche, $ec = 0.3 \text{ GeV}/T m$,

$$pc [\text{GeV}] = 0.3 B [\text{Tesla}] R [\text{metro}]$$

Il fatto che una particella carica in un campo magnetico uniforme percorre una circonferenza viene sfruttato negli acceleratori circolari per far passare ripetutamente la particella in una zona in cui è presente un campo elettrico accelerante. In questo modo la particella guadagna progressivamente energia con accelerazioni multiple con frequenza legata alla frequenza di rivoluzione.

Il ciclotrone

Il primo acceleratore circolare, il ciclotrone, è stato realizzato da Lawrence ²⁵ nel 1930. Lo schema di funzionamento è illustrato nella Fig.1.19. Un dipolo produce un campo magnetico uniforme e costante in un cerchio di raggio R . All'interno del dipolo la camera a vuoto è compresa tra due elettrodi cavi a forma di "D" e agli elettrodi è applicata una differenza di potenziale alternata a frequenza ω_{RF} , $\Delta V(t) = V_o \cos \omega_{RF} t$. La distanza tra gli elettrodi è molto minore del raggio R del magnete. Il campo elettrico è nel piano normale al campo magnetico. La sorgente di ioni è posta al centro della camera a vuoto.

Gli ioni emessi dalla sorgente vengono accelerati dal campo elettrico ed entrano nel cavo di uno degli elettrodi dove il campo elettrico è nullo. Per effetto del campo magnetico, gli ioni percorrono una semicirconferenza di raggio $\rho = p/qB$ e frequenza di rivoluzione $\omega = qB/m\gamma$. Se è soddisfatta la *condizione di risonanza*, $\omega = \omega_{RF}$, gli ioni attraversano di nuovo la zona tra i due elettrodi in fase con la differenza di potenziale e vengono di nuovo accelerati. Quindi gli ioni percorrono una traiettoria a spirale con raggio via via crescente e l'aumento di energia per giro è $\Delta E = 2q\Delta V$. Quando il raggio di curvatura è uguale a R gli ioni non sono più soggetti all'azione del campo magnetico ed escono tangenti alla traiettoria.

La massima energia raggiungibile è limitata dal valore del campo, B , e dal raggio del magnete, R . Per uno ione di carica Ze e peso atomico A :

$$p_{max}c = 0.3ZBR \quad K_{max} = Amc^2 \left[\left[1 + \left(\frac{0.3ZB}{Amc^2} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right]$$

²⁵ premio Nobel per la fisica nel 1939

Per $B = 1 \text{ T}$, $R = 1 \text{ m}$, si ha $p_{max} = 300 Z \text{ MeV}/c$ che corrisponde per un protone ad una energia cinetica $K_{max} = 47 \text{ MeV}$.

Per velocità $v \ll c$, $\gamma \simeq 1$, la frequenza di rivoluzione è costante e la condizione di risonanza è rispettata se $\omega_{RF} = \text{costante}$. Questo limita il valore dell'energia cinetica: per protoni $K_{max} \simeq 20 \text{ MeV}$. Per raggiungere energie più elevate occorre variare (diminuire) la frequenza ω_{RF} durante il ciclo di accelerazione. Questo è quello che avviene nel *sincro-ciclotrone*.

Il *ciclotrone isocrono* funziona a frequenza ω_{RF} costante e i poli del magnete sono sagomati in modo che il valore del campo B aumenti con il raggio

$$\omega = \frac{0.3ZB(0)c}{Amc^2} \quad B(r) = \frac{A}{Z} \frac{mc^2}{0.3(c^2/\omega^2 - r^2)^{1/2}}$$

I moderni ciclotroni accelerano protoni e ioni fino ad energie cinetiche di circa 600 MeV e vengono usati per studiare reazioni nucleari nella regione delle energie intermedie e per produrre fasci secondari di particelle.

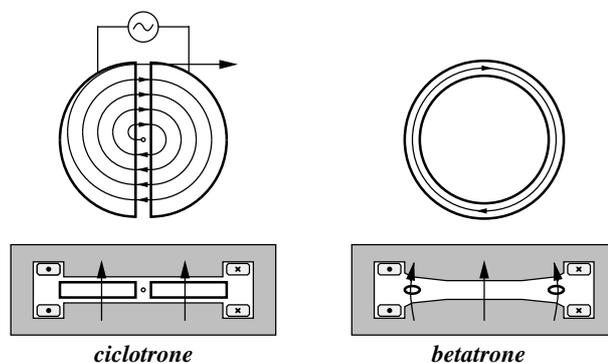


Figure 1.19: Schema del ciclotrone e del betatrone

Il betatrone

Il betatrone è stato realizzato da Kerr nel 1940 per accelerare elettroni ad energie, a quei tempi, elevate. Il nome betatrone ha origine dai *raggi beta* che sono elettroni emessi nei decadimenti dei nuclei. Nel betatrone gli elettroni percorrono una traiettoria circolare di raggio R e la camera a vuoto è a forma di *ciambella* racchiusa tra i poli di un magnete (Fig.1.19). Il campo magnetico è normale al piano della traiettoria.

Il betatrone funziona per induzione elettromagnetica. Non intervengono campi elettrici: si fa variare il campo magnetico e la forza elettromotrice è fornita dalla variazione del flusso del campo magnetico concatenato con la ciambella. Con riferimento alla Fig.1.20, chiamiamo $\langle B \rangle$ il valore del campo magnetico mediato su tutta la superficie delimitata dalla ciambella e B_o il valore del campo magnetico lungo l'orbita. Se si fa variare il campo magnetico, il campo elettrico generato lungo la

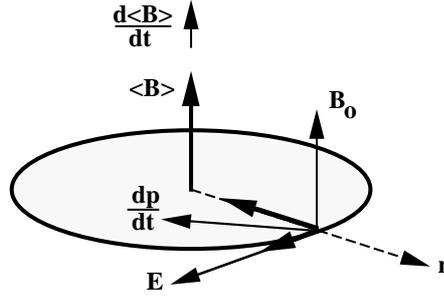


Figure 1.20: Principio di funzionamento del betatrone

circonferenza di raggio R è

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi R E = -\frac{d\Phi\langle B \rangle}{dt} = -\pi R^2 \frac{d\langle B \rangle}{dt}$$

Una particella di carica q è soggetta alla forza tangenziale

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} = \frac{q}{2}\vec{R} \wedge \frac{d\langle \vec{B} \rangle}{dt}$$

Perché la particella percorra la circonferenza di raggio R costante, deve risultare

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{R} \wedge \frac{d\vec{B}_0}{dt}$$

Quindi è possibile accelerare un elettrone lungo una traiettoria di raggio costante se è soddisfatta la

$$\text{condizione di betatrone} \quad \frac{d\langle \vec{B} \rangle}{dt} = 2 \frac{d\vec{B}_0}{dt} \quad \langle \vec{B} \rangle = 2\vec{B}_0 + \text{costante}$$

che si può ottenere sagomando opportunamente i poli del magnete.

Il sincrotrone

In acceleratori circolari costruiti con un magnete singolo la massima energia raggiungibile è limitata dal campo magnetico e dal raggio del magnete. Poiché il valore di B che si può raggiungere, anche utilizzando bobine superconduttrici, è limitato ad alcuni *Telsa*, per aumentare l'energia occorre aumentare il raggio dell'acceleratore. Questo non si può fare con un singolo dipolo, che sarebbe enorme, ma si costruiscono acceleratori con più magneti curvanti distribuiti lungo la traiettoria delle particelle. Quindi il raggio di curvatura della traiettoria è fissato, $R = \text{costante}$, e la camera a vuoto è una ciambella contenuta tra i poli dei magneti curvanti. Lungo la traiettoria circolare, in uno o più punti, vi sono cavità *RF* dove un campo elettrico alternato a frequenza ω_{RF} cede energia alle particelle. La frequenza ω_{RF} deve essere uguale alla *frequenza di ciclotrone* o pari a un multiplo intero h (*numero di armonica*) e le particelle devono attraversare la cavità in fase con ω_{RF} .

Il sincrotrone è un acceleratore che opera in cicli: iniezione, accelerazione, estrazione del fascio e ritorno alla fase iniziale e utilizza un primo stadio di accelerazione, usualmente un acceleratore lineare, che inietta le particelle con impulso p_i (Fig.1.21). Nella fase di iniezione si ha

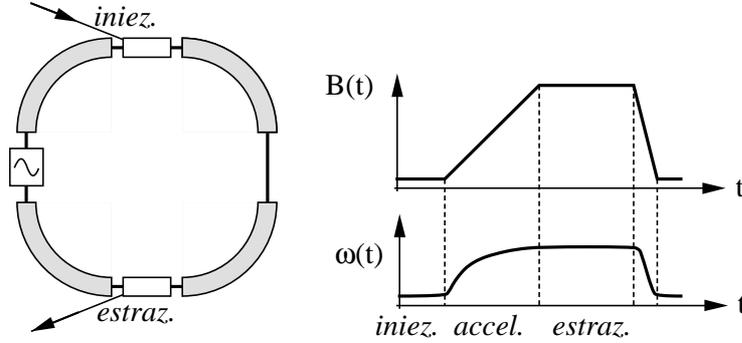


Figure 1.21: Schema del sincrotrone

$$B_i = p_i/qR \quad \omega_i = qB_i/m\gamma_i = \beta_i c/R$$

Nella fase di accelerazione si aumenta gradualmente il campo magnetico e si varia di conseguenza la frequenza $\omega_{RF} = h qB/m\gamma$. Quando è raggiunto il valore massimo del campo magnetico, il fascio viene estratto impulsando dei magneti e dopo l'estrazione il valore del campo magnetico e della frequenza vengono riportati ai valori iniziali.

In un *proto-sincrotrone* occorre variare la frequenza ω_{RF} durante la fase di accelerazione

$$\omega_{RF} = h \omega = h \beta c/R$$

Se l'iniezione dei protoni avviene con quantità di moto p_i non piccola rispetto a mc , la banda di frequenza in cui operano le cavità è limitata e questo comporta notevoli vantaggi. In un *elettro-sincrotrone* invece è sufficiente iniettare elettroni con energia di pochi MeV , $\beta \approx 1$, per operare le cavità a $\omega_{RF} \approx c/R = costante$.

1.3.4 Cavità a radiofrequenza

Negli acceleratori le particelle cariche vengono accelerate con campi elettrici alternati con frequenze tipiche $\sim GHz$. I campi elettromagnetici sono guidati e contenuti all'interno di conduttori, *guide d'onda* e *cavità*. Facciamo l'ipotesi che questi siano conduttori ideali con resistività $\rho \simeq 0$ e che il mezzo dielettrico (aria a bassissima pressione) sia omogeneo e isotropo con $\epsilon \simeq \epsilon_o$ e $\mu \simeq \mu_o$. La velocità nel dielettrico indefinito è $v_o = (\epsilon\mu)^{-1/2} \simeq c$ e la lunghezza d'onda è $\lambda_o = v_o/\nu$. La frequenza è fissata dai dispositivi che eccitano i campi e la velocità, v , all'interno della guida è definita dalle condizioni al contorno dei campi elettromagnetici sulle superfici che separano conduttore e dielettrico; il campo elettrico è perpendicolare alla superficie di un conduttore ideale, $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$, e il campo magnetico è parallelo, $\vec{B} \wedge \hat{n} = 0$.

In un dielettrico omogeneo e isotropo, in assenza di densità di carica e di corrente, le equazioni di Maxwell sono

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

le componenti $F(x, y, z, t)$ dei campi \vec{E} , \vec{B} , soddisfano l'equazione di d'Alembert

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

e la soluzione si può sviluppare come sovrapposizione di componenti di Fourier.

Guide d'onda

Consideriamo una guida d'onda rettangolare indefinita lungo la direzione z (Fig.1.22) e esprimiamo la soluzione come

$$F(x, y, z, t) = \psi(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = ikF \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -i\omega F$$

in cui la funzione $\psi(x, y)$ rappresenta il fronte d'onda che si propaga con *velocità di fase* $v = \omega/k$ lungo l'asse z . La funzione ψ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K^2 \psi = 0 \quad K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2}$$

Perché l'onda si propaghi senza attenuazione le quantità $k = \omega/v$ e K devono essere reali. Da questo ($\omega/v = [(\omega/c)^2 - K^2]^{1/2}$ e quindi $\omega/c > K$) si conclude che solo la radiazione di lunghezza d'onda $\lambda_o = 2\pi c/\omega$ minore della *lunghezza d'onda critica*, $\lambda_c = 2\pi/K$, si può propagare senza attenuazione all'interno della guida.

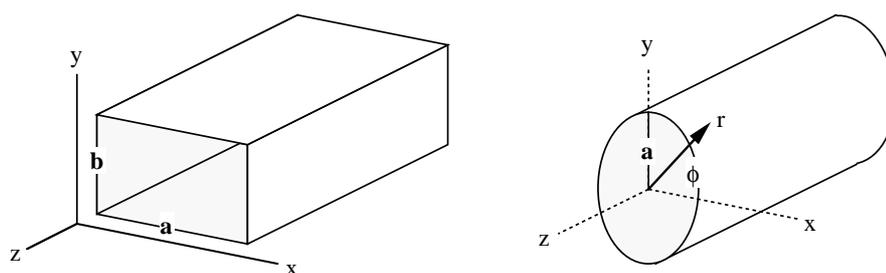


Figure 1.22: Guide d'onda rettangolare e cilindrica

La soluzione $\psi(x, y)$ si può esprimere come prodotto di due funzioni delle singole variabili $\psi(x, y) = \xi(x)\eta(y)$ di modo che l'equazione delle onde diventa

$$\xi''\eta + \xi\eta'' + K^2\xi\eta = 0 \quad \xi''/\xi + \eta''/\eta + K^2 = 0$$

e si ottiene una soluzione oscillante ponendo

$$\xi'' + K_a^2 \xi = 0 \quad \eta'' + K_b^2 \eta = 0 \quad K_a^2 + K_b^2 = K^2$$

$$\psi(x, y) = C \sin(K_a x + \alpha) \sin(K_b y + \beta)$$

dove le costanti K_a , α , K_b , β , sono determinate dalle condizioni di continuità dei campi sulle pareti della guida.

Le componenti trasverse dei campi, E_x , E_y , B_x , B_y , sono funzioni delle componenti longitudinali, ad esempio

$$\begin{aligned} -K^2 E_x &= (\partial_x \partial_x + \partial_y \partial_y) E_x = \\ &= -\partial_x (\partial_y E_y + \partial_z E_z) + \partial_y \partial_y E_x = \\ &= -\partial_y (\partial_x E_x - \partial_y E_y) - \partial_x \partial_z E_z = -\partial_y i\omega B_z - \partial_x i(\omega/v) E_z \end{aligned}$$

e analogamente per le altre componenti

$$\begin{aligned} -iK^2 E_x &= +(\omega/v) \partial_x E_z + \omega \partial_y B_z & -iK^2 B_x &= -(\omega/c^2) \partial_y E_z + (\omega/v) \partial_x B_z \\ -iK^2 E_y &= +(\omega/v) \partial_y E_z - \omega \partial_x B_z & -iK^2 B_y &= +(\omega/c^2) \partial_x E_z + (\omega/v) \partial_y B_z \end{aligned}$$

Quindi, per descrivere la propagazione delle onde elettromagnetiche nella guida, è sufficiente definire le componenti longitudinali dei campi, E_z e B_z . Consideriamo i casi in cui una delle due componenti sia nulla, si definiscono:

TM *transverse magnetic mode*: $B_z = 0$;

ponendo che il campo elettrico sia normale alle superfici della guida ($E_z = 0$ per $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, in Fig.1.22) si ottiene $\alpha = 0$, $K_a a = m\pi$, $\beta = 0$, $K_b b = n\pi$, con m, n interi. La soluzione è

$$E_{z,mn} = C \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) e^{i(kz - \omega t)} \quad B_z = 0$$

TE *transverse electric mode*: $E_z = 0$;

in questo caso le componenti trasverse del campo elettrico sono

$$\begin{aligned} -iK^2 E_x &= \omega \partial_y B_z = \omega K_b C \sin(K_a x + \alpha) \cos(K_b y + \beta) \\ -iK^2 E_y &= \omega \partial_x B_z = \omega K_a C \cos(K_a x + \alpha) \sin(K_b y + \beta) \end{aligned}$$

e ponendo che il campo elettrico sia normale alle superfici della guida ($E_x = 0$ per $y = 0$, $y = b$, in Fig.1.22; $E_y = 0$ per $x = 0$, $x = a$) si ottiene $\alpha = \beta = \pi/2$, $K_a a = m\pi$, $K_b b = n\pi$:

$$E_z = 0 \quad B_{z,mn} = C \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) e^{i(kz - \omega t)}$$

La lunghezza d'onda critica dipende dalle dimensioni della guida e dal modo di propagazione

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{(K_a^2 + K_b^2)^{1/2}} = \frac{2}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^{1/2}} = \frac{2ab}{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^{1/2}}$$

ad esempio

modo TM	$TM_{1,1}$	$\lambda_c = 2ab/(b^2 + a^2)^{1/2}$	$TM_{1,n \gg 1}$	$\lambda_c \simeq 2b/n$
modo TE	$TE_{1,0}$	$\lambda_c = 2a$	$TE_{m \gg 1,0}$	$\lambda_c \simeq 2a/n$
	$TE_{0,1}$	$\lambda_c = 2b$	$TE_{0,n \gg 1}$	$\lambda_c \simeq 2b/n$

La lunghezza d'onda nella guida è maggiore di quella nel dielettrico indefinito e, poiché la frequenza non cambia, anche la velocità di fase nella guida è maggiore

$$\lambda = \frac{\lambda_o}{(1 - \lambda_o^2/\lambda_c^2)^{1/2}} \quad v = \frac{c}{(1 - \lambda_o^2/\lambda_c^2)^{1/2}}$$

La velocità di fase *non* è la velocità con cui si propaga energia nella guida. La *velocità di gruppo* è quella con cui si propaga un *pacchetto d'onda* costituito dalla sovrapposizione di fronti d'onda con energia leggermente diversa, ad esempio

$$\psi(x, y) [e^{i(kz - \omega t)} + e^{i([k + \Delta k]z - [\omega + \Delta \omega]t)}] = \psi(x, y) e^{i(kz - \omega t)} [1 + e^{i(\Delta kz - \Delta \omega t)}]$$

L'ampiezza del pacchetto d'onda dipende da z e t , e l'energia si mantiene costante sui fronti con $A(z, t) = 1 + e^{i(\Delta kz - \Delta \omega t)} = \text{costante}$, cioè $z = (\Delta \omega / \Delta k)t + \text{costante}$. Poiché $k^2 = \omega^2/v^2 = \omega^2/c^2 - K^2$ e K dipende solo dalle caratteristiche geometriche della guida, si ha $kdk = \omega d\omega/c^2$. La velocità di gruppo nella guida, v_g , è minore sia della velocità di fase, v , che della velocità nel dielettrico indefinito, c ,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{\omega/k} = \frac{c^2}{v} = c \left(1 - \frac{\lambda_o^2}{\lambda_c^2}\right)^{1/2}$$

La Fig.1.23 mostra la relazione tra frequenza e numero d'onda, $\omega/c = (k^2 + K^2)^{1/2}$,

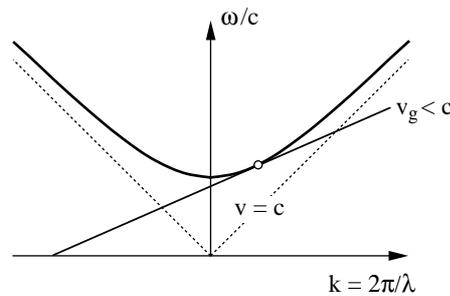


Figure 1.23: Relazione di dispersione in una guida d'onda

in una guida d'onda. Un punto sulla curva fornisce la velocità di fase, $v > c$, mentre la derivata fornisce la velocità di gruppo $v_g = d\omega/dk < c$; con $v_g v = c^2$. Per $k \gg K$ ($\lambda_o \ll \lambda_c$) si ha $v \rightarrow c$ e $v_g \rightarrow c$.

Guide d'onda cilindriche

L'equazione delle onde in coordinate cilindriche r, ϕ, z (Fig.1.22) è

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Nel caso di guide a simmetria cilindrica conviene fattorizzare la soluzione come $F(r, \phi, z, t) = R(r)\Phi(\phi)e^{i(kz-\omega t)}$ che soddisfa l'equazione

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + K^2 = 0 \quad K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2}$$

Il primo e il terzo termine non dipendono dall'angolo ϕ per cui $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = \text{costante}$ e si ha una soluzione oscillante se

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + n^2\Phi = 0 \quad \Phi(\phi) = C \sin(n\phi + \alpha)$$

L'equazione radiale diventa

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad \rho = Kr$$

e le soluzioni sono le funzioni di prima specie di Bessel di ordine n , $R(Kr) = J_n(\rho)$. Queste sono funzioni oscillanti che hanno un numero infinito di zeri, $J_n(\zeta_{mn}) = 0$. La soluzione generale è del tipo

$$F(r, \phi, z, t) = C J_n(Kr) \sin(n\phi + \alpha) e^{i(kz-\omega t)}$$

Le componenti trasverse dei campi si possono esprimere in funzione delle componenti longitudinali

$$\begin{aligned} -iK^2 E_r &= +(\omega/v)\partial_r E_z + (\omega/r)\partial_\phi B_z & -iK^2 B_r &= -(\omega/c^2 r)\partial_\phi E_z + (\omega/v)\partial_r B_z \\ -iK^2 E_\phi &= +(\omega/vr)\partial_\phi E_z - \omega\partial_r B_z & -iK^2 B_\phi &= +(\omega/c^2)\partial_r E_z + (\omega/vr)\partial_\phi B_z \end{aligned}$$

TM Nei modi TM il campo magnetico forma linee chiuse nel piano normale all'asse z , mentre il campo elettrico ha componente longitudinale non nulla (Fig.1.24); per questo i modi TM possono essere utilizzati per accelerare particelle cariche lungo l'asse z . Le soluzioni sono definite dalla condizione che la componente azimutale del campo elettrico sia nulla sulla parete della guida, $E_\phi(r=a) = 0$. Poichè questa è proporzionale alla funzione di Bessel, $E_\phi(r) \propto J_n(Kr)/r$, i modi TM sono caratterizzati dalla condizione $J_n(Ka) = 0$ che definisce infiniti valori K_{mn} . La lunghezza d'onda critica è $\lambda_c^{mn} = 2\pi/K_{mn}$.

TE Nei modi TE le linee di forza del campo elettrico sono normali all'asse z e il campo magnetico forma linee chiuse con componente longitudinale non nulla. La componente azimutale del campo elettrico è proporzionale alla derivata della funzione di Bessel, $E_\phi(r) \propto J'_n(Kr)/r$, e anche in questo caso la condizione $J'_n(Ka) = 0$ definisce infiniti valori K_{mn} .

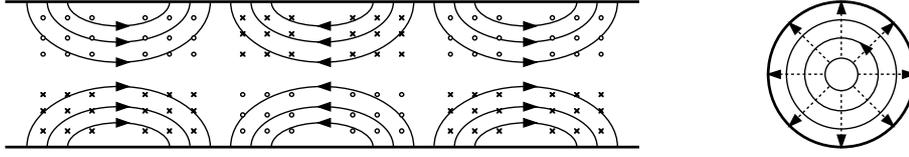


Figure 1.24: Linee di campo per il modo TM_{11} in una guida d'onda cilindrica; campo elettrico: \rightarrow ; campo magnetico: \times entrante, \bullet uscente

Cavità risonanti

Una guida d'onda non è adatta ad accelerare particelle cariche perché la velocità di fase è sempre maggiore di quella delle cariche elettriche da accelerare. Se la guida d'onda è chiusa da pareti conduttrici, si possono stabilire all'interno onde stazionarie se la lunghezza della guida, L , è pari ad un numero semi-intero di lunghezze d'onda, $L = \ell\lambda/2$. In questo modo si realizza una cavità caratterizzata dal modo di oscillazione e dalla frequenza di risonanza, quindi da tre numeri interi ℓ, m, n .

Se consideriamo un dielettrico con conducibilità elettrica finita, σ , il campo elettromagnetico induce una densità di corrente, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, sulle pareti della cavità e quindi si ha dissipazione di energia per effetto Joule. Introducendo la densità di corrente nelle equazioni di Maxwell, $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \epsilon\partial\vec{E}/\partial t$, l'equazione delle onde sulle pareti della cavità viene modificata con un termine dissipativo

$$\nabla^2 \vec{E} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Questa è l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato, quindi l'ampiezza dei campi, \vec{E}, \vec{B} , diminuisce nel tempo con legge esponenziale.

Consideriamo la soluzione del tipo $F(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\chi(t)$ e facciamo l'ipotesi che il termine dissipativo sia piccolo, cioè che la funzione $\psi(x, y, z)$ sia soluzione dell'equazione $\nabla^2\psi + \kappa^2\psi = 0$ e che sia definita dalle condizioni al contorno dei campi elettromagnetici sulle pareti della cavità (se si usa un conduttore di conducibilità elevata – rame, argento, o materiale superconduttore – le condizioni $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$, $\vec{B} \wedge \hat{n} = 0$, sono un'ottima approssimazione). Per brevità indichiamo $\psi_n(x, y, z)$ la soluzione caratterizzata da tre numeri interi ℓ, m, n , che individuano la condizione di risonanza e il modo di oscillazione. L'ampiezza $\chi_n(t)$ soddisfa l'equazione

$$\epsilon\mu \ddot{\chi}_n + \sigma\mu \dot{\chi}_n + \kappa_n^2 \chi_n = 0 \quad \ddot{\chi}_n + \frac{1}{\tau} \dot{\chi}_n + \omega_n^2 \chi_n = 0 \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad \omega_n = \frac{\kappa_n}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

che ha soluzione $\chi_n(t) = e^{-t/2\tau}(Ae^{i\Omega_n t} + Be^{-i\Omega_n t})$ con $\Omega_n = \omega_n(1 - 1/4Q^2)^{1/2}$. ω è la frequenza di risonanza della cavità senza perdite, $Q = \tau\omega = (\epsilon/\mu)^{1/2}\kappa/\sigma$ è il *fattore di merito* della cavità. La banda di frequenza è definita da una curva Lorentziana centrata sulla frequenza di risonanza con larghezza FWHM $\Delta\omega = \Omega/Q$.

Quindi una cavità risonante deve avere fattore di merito il più elevato possibile, $Q \gg 1$, in questo caso $\Omega_n = \omega_n$.

Il fattore di merito è il rapporto tra l'energia immagazzinata alla frequenza di risonanza e l'energia dissipata in un periodo: $Q = 2\pi \langle \mathcal{E} \rangle / \int_T W dt = \omega \langle \mathcal{E} \rangle / \langle W \rangle$. In una cavità, come in una guida d'onda, il campo elettromagnetico penetra per un piccolo spessore all'interno del conduttore, *effetto pelle*, generando correnti che dissipano energia per effetto Joule. Se ϵ_c, μ_c , sono le costanti del materiale di conducibilità σ , si ha $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \sigma \vec{E} - i\omega \epsilon_c \vec{E}$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = k^2 \vec{H} = i\omega \mu_c (\sigma - i\omega \epsilon_c) \vec{H}$, e quindi il vettore d'onda, $k^2 = \omega^2 \mu_c \epsilon_c + i\omega \mu_c \sigma$, ha una parte diffusiva e una assorbitiva:

$$k = \frac{1}{\delta} (1 + i\omega \epsilon_c / \sigma) \quad \delta = (2/\omega \mu_c \sigma)^{1/2}$$

δ è lo spessore della *pelle* del conduttore. Per un buon conduttore, ad esempio il rame che ha resistività $\rho = 1/\sigma = 1.75 \cdot 10^{-8} \Omega m$, alla frequenza di $1 GHz$, si ha $\omega \epsilon_c / \sigma \simeq 10^{-9}$ e $\delta \simeq 2 \mu m$.

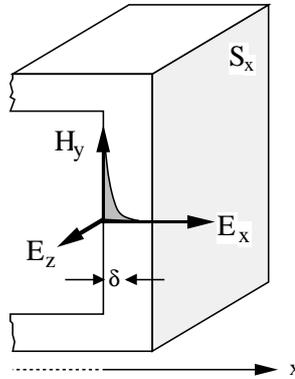


Figure 1.25: Effetto pelle sulle pareti di una guida d'onda

Per calcolare la potenza dissipata consideriamo ad esempio un modo *TM* in cui il campo magnetico ha solo la componente H_y sulla superficie del conduttore, $x = 0$ in Fig.1.25, $H_y = H_o e^{ix/\delta} e^{-x/\delta} \sin \omega t$. Trascurando la corrente di spostamento nel conduttore, il campo elettrico sulla superficie ha una componente longitudinale $E_z = \frac{1}{\sigma} \partial_x H_y = \frac{i-1}{\sigma \delta} H_y$ che genera una corrente longitudinale $j_z = \sigma E_z$. La potenza media è

$$W = \frac{1}{2} \int j_z E_z dx dy dz = \frac{|H_o|^2}{\sigma \delta} \int_0^\infty e^{-2x/\delta} dx S_x = \frac{|H_o|^2}{2\sigma \delta} S_x$$

dove S_x è la superficie della cavità normale a \hat{x} . L'energia media immagazzinata nella cavità è

$$\mathcal{E} = \int (\epsilon \langle E^2 \rangle / 2 + \mu \langle H^2 \rangle / 2) dx dy dz \simeq \frac{\mu |H_o|^2}{2} V$$

dove V è il volume della cavità. Estendendo a tutte le pareti della cavità si ottiene per il fattore di merito

$$Q = \frac{\omega \langle \mathcal{E} \rangle}{\langle W \rangle} \simeq \omega \mu \sigma \delta \frac{V}{S} \times f.g. = \frac{\mu}{\mu_c} \frac{V}{S \delta} \times f.g.$$

dove $f.g. \simeq 1$ è un fattore geometrico che dipende dal modo di eccitazione e dalla forma della cavità. Quindi il fattore di merito è tanto maggiore quanto più elevato è il rapporto V/S (per cavità sferica $>$ cilindrica $>$ rettangolare) e quanto più piccolo è lo spessore dell'effetto pelle δ .

Esempio: cavità cilindrica

Consideriamo una cavità cilindrica di lunghezza L e raggio a ; la soluzione per i campi è del tipo $F(r, \phi, z, t) = C J_n(Kr) \sin(n\phi + \alpha) e^{ikz} e^{-i\omega t}$ con $K^2 = (\omega/c)^2 - k^2$

- per la condizione di risonanza si ha: $k = \pi\ell/L$ con ℓ intero;
- consideriamo il modo TM ($B_z = 0$):
le componenti trasverse del campo elettrico si annullano alle estremità della cavità $z = 0$ e $z = L$ dove la componente longitudinale E_z è massima; cioè $e^{ikz} \rightarrow \cos kz = \cos \frac{\pi\ell}{L}z$; quindi $E_z = C J_n(Kr) \sin(n\phi + \alpha) \cos \frac{\pi\ell}{L}z e^{-i\omega t}$;
- la componente azimutale del campo elettrico
 $E_\phi = \frac{ik}{K^2 r} \partial_\phi E_z = iC \frac{\pi\ell n}{K^2 L r} J_n(Kr) \cos(n\phi + \alpha) \cos \frac{\pi\ell}{L}z e^{-i\omega t}$;
si annulla sulla superficie laterale della cavità per $r = a$, la condizione $J_n(Ka) = 0$ si verifica per $K_{mn}a = \zeta_{mn}$ e definisce i modi trasversi della cavità;
- le altre componenti dei campi sono:
 $E_r = \frac{ik}{K^2} \partial_r E_z = iC \frac{\pi\ell a}{\zeta_{mn} L} J'_n(\zeta_{mn}r/a) \sin(n\phi + \alpha) \cos \frac{\pi\ell}{L}z e^{-i\omega t}$
 $B_\phi = \frac{i\omega}{c^2 K^2} \partial_r E_z = iC \frac{\omega a}{c^2 \zeta_{mn}} J'_n(\zeta_{mn}r/a) \sin(n\phi + \alpha) \cos \frac{\pi\ell}{L}z e^{-i\omega t}$
 $B_r = \frac{-i\omega}{c^2 K^2 r} \partial_\phi E_z = -iC \frac{\omega a^2 n}{c^2 \zeta_{mn}^2 r} J_n(\zeta_{mn}r/a) \cos(n\phi + \alpha) \cos \frac{\pi\ell}{L}z e^{-i\omega t}$
- la lunghezza d'onda critica è $\lambda_c = 2\pi a / \zeta_{mn}$
le lunghezze d'onda dei modi risonanti sono $\lambda_{\ell mn} = 2\pi / [(\zeta_{mn}/a)^2 + (\pi\ell/L)^2]^{1/2}$
- le frequenze di risonanza sono $\omega_{\ell mn} = c [(\zeta_{mn}/a)^2 + (\pi\ell/L)^2]^{1/2}$

I primi zeri delle funzioni di Bessel, $J_n(\zeta_{mn}) = 0$, sono:

$$\begin{array}{ll} n = 0 & \zeta_{m0} = 2.405 \quad 5.550 \quad 8.654 \quad \dots \\ n = 1 & \zeta_{m1} = 3.832 \quad 7.016 \quad 10.173 \quad \dots \end{array}$$

Il modo più semplice è con $n = 0$ per cui non si ha dipendenza dei campi dall'angolo azimutale e risulta $E_\phi = 0$, $B_r = 0$. Per $m = 1$: $\lambda_c = 2\pi a / \zeta_{10} = 2.61a$.

Nel modo TM_{010} , $\ell = 0$, non si ha dipendenza dei campi da z , la frequenza di risonanza è $\omega_{010} = c\zeta_{10}/a$; le componenti dei campi sono:

$$\begin{array}{ll} E_z = E_o J_0(\zeta_{10}r/a) & B_z = 0 \\ E_r = 0 & B_r = 0 \\ E_\phi = 0 & B_\phi = iE_o \frac{\omega a}{c^2 \zeta_{10}} J'_0(\zeta_{10}r/a) = -\frac{iE_o}{c} J_1(\zeta_{10}r/a) \end{array}$$

Nel modo TM_{110} , $\ell = 1$, la frequenza di risonanza è $\omega_{110} = c[(\zeta_{10}/a)^2 + (\pi/L)^2]^{1/2}$; le componenti dei campi sono:

$$\begin{aligned} E_z &= E_o J_0(\zeta_{10}r/a) \cos \frac{\pi}{L}z & B_z &= 0 \\ E_r &= E_o \frac{\pi a}{\zeta_{10}L} J_1(\zeta_{10}r/a) \sin \frac{\pi}{L}z & B_r &= 0 \\ E_\phi &= 0 & B_\phi &= E_o \frac{\omega_{110}a}{c^2 \zeta_{10}} J_1(\zeta_{10}r/a) \sin \frac{\pi}{L}z \end{aligned}$$

La Fig.1.26 mostra le linee del campo elettrico per i modi TM_{010} e TM_{110} in una cavità cilindrica. Le linee del campo magnetico sono circonferenze coassiali con l'asse z . Dalla figura è chiaro che il modo TM_{010} è il più efficace per accelerare particelle cariche lungo l'asse z .

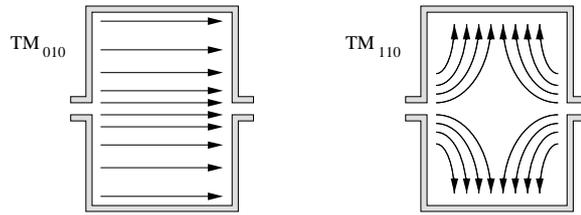


Figure 1.26: Linee del campo elettrico per i modi TM_{010} e TM_{110} in una cavità cilindrica

1.3.5 Accelerazione in cavità risonanti

In un acceleratore circolare, l'aumento di energia cinetica di una particella di carica q e velocità βc in un singolo passaggio è

$$\Delta\mathcal{E} = q\Delta V = \int_{-L/2}^{+L/2} qE_o \cos(\omega t + \phi) dz = \int_{-L/2\beta c}^{+L/2\beta c} qE_o \beta c \cos(\omega t + \phi) dt$$

dove, per $\phi = 0$ la particella è in fase con il campo accelerante nella cavità. L'aumento di velocità in un singolo passaggio è trascurabile, $\beta \simeq \text{costante}$, e quindi

$$\Delta\mathcal{E} = qE_o L \frac{\sin \omega L/2\beta c}{\omega L/2\beta c} \cos \phi$$

Il *fattore di perdita*, $\sin(\omega L/2\beta c)/(\omega L/2\beta c)$, non è significativamente minore di 1 se $\omega L/2\beta c = \zeta_{10}L/2\beta a \leq 1$ cioè $L/a \leq 0.8\beta$. Questa condizione è facile da soddisfare se $\beta \simeq 1$, ma per $\beta \ll 1$ richiede che sia $L \ll a$, cioè di avere cavità corte lungo la direzione di accelerazione.

In un acceleratore lineare si hanno tante cavità allineate lungo l'asse z e, per mantenere coerenza di fase tra il campo accelerante e la particella, deve essere $L = n\beta\lambda/2$ dove L è la distanza tra le cavità e λ è la lunghezza d'onda della radiazione nelle

cavità. Lo schema originario è quello di Wideroe con tubi a deriva adiacenti connessi ad un generatore alternato (Fig.1.27). In questo caso $L = \beta\lambda/2$ e il gradiente di energia è $d\mathcal{E}/dz = \Delta\mathcal{E}/\lambda = \beta q\Delta V/2L$. Un schema più efficiente è quello di Alvarez, con $L = \beta\lambda$ che, a parità di campo elettrico, produce un gradiente di energia doppio, $d\mathcal{E}/dz = \beta q\Delta V/L$. Inoltre in questo caso la corrente lungo le connessioni delle cavità è nulla e la dissipazione di potenza è minore.

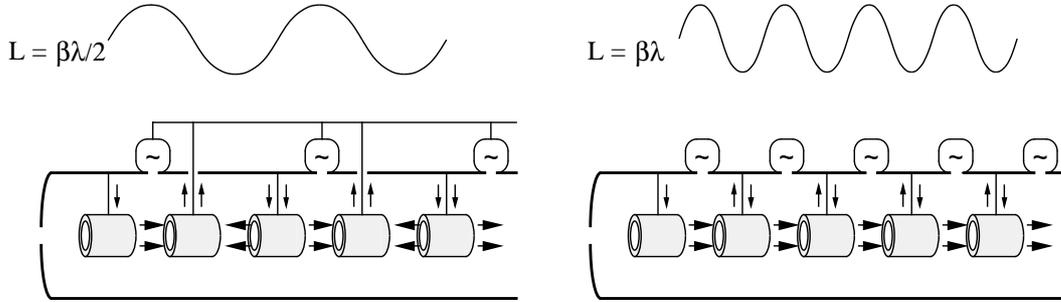


Figure 1.27: Schemi di Wideroe e di Alvarez per un acceleratore lineare

Nei moderni acceleratori LINAC-RF le particelle vengono accelerate in un guida d'onda in cui si fa in modo che la velocità di fase con cui si propaga il campo elettromagnetico sia pari alla velocità βc . Consideriamo una guida d'onda cilindrica di raggio a in cui vengono accelerati elettroni di alta energia per cui $\beta \simeq 1$. Nella guida si possono propagare le onde elettromagnetiche di frequenza $\omega > \omega_c = \zeta c/a$, dove il fattore ζ dipende dal modo eccitato nella guida. Se nella guida sono disposti dei diaframmi di raggio $b < a$ opportunamente spazati a distanza L ($L \simeq$ costante per $\beta \simeq 1$) si stabiliscono onde stazionarie di frequenza $\omega = \zeta/b > \omega_c$ e numero d'onda $k = \ell\pi/L$. La velocità di gruppo è nulla per un'onda stazionaria e quindi $d\omega/dk = 0$ in corrispondenza dei valori $k = \ell\pi/L$ e la relazione di dispersione nella guida viene modificata nell'andamento periodico mostrato in Fig.1.28. In questo modo è possibile realizzare la condizione in cui il campo elettromagnetico si propaga con velocità di fase $\leq c$ e cede continuamente energia alla particella.

1.3.6 Oscillazioni di betatrone

In un acceleratore circolare occorre limitare la dispersione delle particelle durante i tanti giri che queste percorrono nell'anello ed è quindi opportuno studiare la configurazione del campo magnetico che minimizzi la dispersione. Consideriamo una particella di carica q e massa m che percorre una circonferenza di raggio R_o detta *orbita di riferimento*. Lungo l'orbita di riferimento il campo magnetico ha componenti $B_x = B_y = 0$, $B_z = B_o$. Consideriamo un sistema di riferimento solidale con la particella, cioè rotante alla frequenza di ciclotrone $\omega = qB/m\gamma$, con l'asse x parallelo alla direzione del moto, $\vec{v} \equiv (v, 0, 0)$, l'asse y parallelo a \vec{r} e l'asse z parallelo a \vec{B} (Fig.1.29).

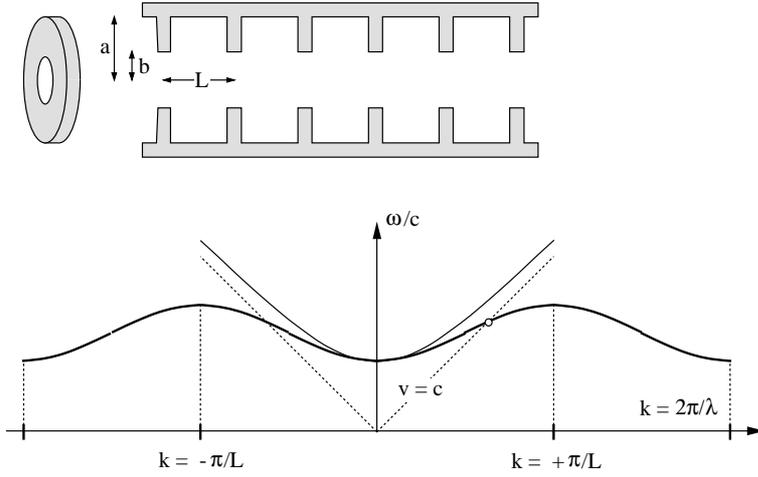


Figure 1.28: Guida d'onda a iride di un Linac-RF e relazione di dispersione nella guida d'onda

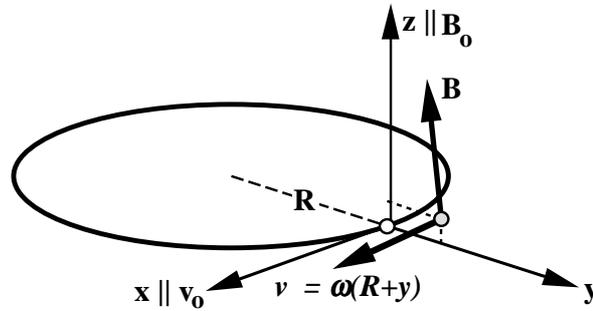


Figure 1.29: Orbita di riferimento e sistema di riferimento rotante

Le equazione del moto in questo riferimento sono

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{d}{dt} m\gamma\dot{y} = m\gamma(\ddot{y} - \omega^2 R) = q(v_z B_x - v_x B_z) = -qvB_z$$

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{d}{dt} m\gamma\dot{z} = m\gamma\ddot{z} = q(v_x B_y - v_y B_x) = +qvB_y$$

$$\ddot{y} + \frac{qvB_z}{m\gamma} - \omega^2 R = \ddot{y} + \frac{q\omega(R+y)B_z}{m\gamma} - \omega^2 R = 0$$

$$\ddot{z} - \frac{qvB_y}{m\gamma} = \ddot{z} - \frac{q\omega(R+y)B_y}{m\gamma} = 0$$

Per piccoli spostamenti dall'orbita di riferimento ($y \ll R, z \ll R$) le componenti del campo magnetico sono

$$B_z = (B_z)_o + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)_o y + \dots \quad B_y = (B_y)_o + \left(\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)_o z + \dots$$

Consideriamo il caso in cui i poli del magnete siano sagomati in modo che la componente principale B_z sia

$$B_z = B_o \left(\frac{r}{R} \right)^{-n} = B_o \left(\frac{R+y}{R} \right)^{-n} \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} = -n \frac{B_o}{R} \left(\frac{R+y}{R} \right)^{-n-1}$$

dove n è chiamato *indice di campo*. Poiché lungo l'orbita risulta $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$, $\partial B_z / \partial y = \partial B_y / \partial y$, si ha

$$B_y = -n B_o z/R \quad B_z = B_o - n B_o y/R$$

Le equazioni del moto diventano

$$\ddot{y} + \frac{qB_o}{m\gamma} \omega (R+y) \left(1 - n \frac{y}{R}\right) - \omega^2 R = \ddot{y} - \omega^2 (n-1) y - \omega^2 n \frac{y^2}{R} = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{qB_o}{m\gamma} \omega (R+y) n \frac{z}{R} = \ddot{z} + \omega^2 n z + \omega^2 n \frac{yz}{R} = 0$$

Approssimando al primo ordine si ottiene

$$\ddot{y} + (1-n) \omega^2 y = 0 \quad \ddot{z} + n \omega^2 z = 0$$

cioè un moto oscillatorio nelle due direzioni nel piano trasverso al moto se è soddisfatta la condizione $0 < n < 1$. Si ha quindi, per piccoli spostamenti dall'orbita di riferimento, una forza di richiamo che produce *oscillazioni di betatrone* nel piano orizzontale e nella direzione verticale con frequenza

$$\omega_H = \omega \sqrt{1-n} \quad \omega_V = \omega \sqrt{n}$$

Questo metodo di compensare piccoli spostamenti dall'orbita di riferimento è detto *foccheggiamento debole*. La lunghezza d'onda delle oscillazioni di betatrone (a parte il fattore 2π) è chiamata *funzione beta*

$$\beta_H = \frac{R}{\sqrt{1-n}} \quad \beta_V = \frac{R}{\sqrt{n}}$$

1.3.7 Trasporto dei fasci

Per descrivere la traiettoria di una particella negli elementi di un'acceleratore conviene utilizzare una rappresentazione che esprima per ciascun elemento le coordinate finali in funzione di quelle iniziali. Indichiamo con s la coordinata lungo la traiettoria di riferimento, con $y(s)$, $z(s)$ gli spostamenti radiale e verticale e con $y'(s) = dy/ds = \tan \theta_y$, $z'(s) = dz/ds = \tan \theta_z$ le derivate. Queste sono legate alle derivate rispetto al tempo da

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = v y' \quad \ddot{y} = v^2 y'' \quad \dots$$

dove v è la velocità lungo la traiettoria di riferimento. In una regione senza campi magnetici la particella percorre una retta

$$y(s) = y_o + y'_o s \quad y'(s) = y'_o \quad \dots$$

che, per un tratto di lunghezza $\Delta s = \ell$, si può rappresentare con le trasformazioni

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix} = M_y \cdot \begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix}$$

e analoga per la proiezione verticale. Per il generico elemento k le *matrici di trasporto* sono definite

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_k = M_y^k \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{k-1} \quad \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_k = M_z^k \cdot \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_{k-1}$$

di modo che le coordinate e gli angoli rispetto alla traiettoria di riferimento all'uscita dell'elemento k si ottengono dai valori iniziali applicando la matrice prodotto delle matrici di trasporto dei singoli elementi

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_k = M_y^k \cdot M_y^{k-1} \dots M_y^1 \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_o \quad \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_k = \dots$$

Se non vi sono effetti dissipativi, le matrici di trasporto hanno determinante unitario, $\text{Det}(M) = 1$.

Le equazioni del moto in un magnete a foccheggiamento debole sono

$$y'' + \frac{1}{\beta_H^2} y = 0 \quad z'' + \frac{1}{\beta_V^2} z = 0$$

e hanno soluzioni

$$\begin{aligned} y &= A \cos s/\beta + B \sin s/\beta & y(0) &= A \\ y' &= -(A/\beta) \sin s/\beta + (B/\beta) \cos s/\beta & y'(0) &= B/\beta \\ \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos s/\beta_H & \beta_H \sin s/\beta_H \\ -\frac{1}{\beta_H} \sin s/\beta_H & \cos s/\beta_H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e analoga per la coordinata verticale.

Le relazioni precedenti mostrano che le ampiezze delle oscillazioni di betatrone sono proporzionali a $\beta_H y'_o$ e $\beta_V z'_o$. D'altra parte nella condizione di foccheggiamento debole, $0 < n < 1$, non si può fare in modo che entrambe le funzioni beta siano piccole rispetto al raggio dell'orbita di accelerazione e questa è una seria limitazione per raggiungere energie elevate con un sincrotrone: aumentando il raggio aumenta l'ampiezza di oscillazione e quindi la dispersione del fascio nel piano trasverso. Se facciamo in modo che sia $n \gg 1$, cioè $\beta_V = R/\sqrt{n} \ll R$, le oscillazioni nel piano

verticale sono di piccola ampiezza, ma il fascio diverge nel piano orizzontale perché l'equazione del moto ha soluzione

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh s/\beta_H & \beta_H \sinh s/\beta_H \\ \frac{1}{\beta_H} \sinh s/\beta_H & \cosh s/\beta_H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix}$$

con $\beta_H = R/\sqrt{n-1} \ll R$.

Quindi un magnete con indice di campo $n > 1$ ha una azione focalizzante in una proiezione e defocalizzante nell'altra. Consideriamo due magneti che abbiano i gradienti di campo scambiati e lunghezza ℓ minore delle lunghezze d'onda di betatrone in entrambe le proiezioni. Per $\ell/\beta \ll 1$ le matrici di trasporto si approssimano al primo ordine

$$M_1^F = \begin{pmatrix} \cos \ell/\beta_1 & \beta_1 \sin \ell/\beta_1 \\ -\frac{1}{\beta_1} \sin \ell/\beta_1 & \cos \ell/\beta_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -\ell/\beta_1^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2^D = \begin{pmatrix} \cosh \ell/\beta_2 & \beta_2 \sinh \ell/\beta_2 \\ +\frac{1}{\beta_2} \sinh \ell/\beta_2 & \cosh \ell/\beta_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ +\ell/\beta_2^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Queste relazioni sono simili a quelle delle lenti in ottica. Una lente di distanza focale f (Fig.1.30) è caratterizzata da una matrice di trasporto

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_o \\ y'_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_o + by'_o \\ cy_o + dy'_o \end{pmatrix}$$

La condizione di *lente sottile*, $y = y_o \forall y'_o$, comporta $a = 1, b = 0$. La condizione sul

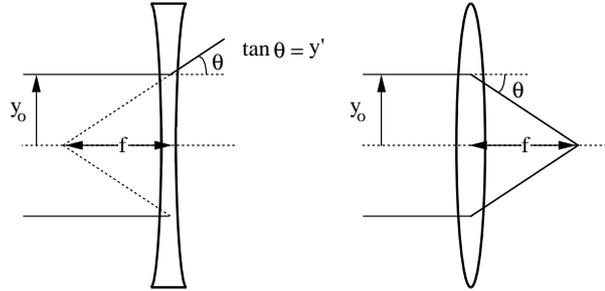


Figure 1.30: Ottica delle lenti sottili

determinante, $ad = 1$, comporta $d = 1$. Per un fascio parallelo, $y'_o = 0$, la deflessione è $y' = y_o/f$ per una lente divergente e $y' = -y_o/f$ per una convergente. Quindi una lente sottile è caratterizzata dalle matrici di trasporto

$$M^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad M^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +1/f & 1 \end{pmatrix}$$

cioè una lente *convergente* ha il termine $1/f$ *negativo*. Una lente di spessore ℓ si può rappresentare come una lente sottile tra due spazi vuoti di lunghezza $\ell/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \pm \ell/2f & \ell + \dots \\ \pm 1/f & 1 \pm \ell/2f \end{pmatrix}$$

e la matrice di trasporto è uguale a quella dei magneti con $\ell/\beta^2 = 1/f$.

Se i due magneti sono separati da una distanza δ la matrice di trasporto, per $\delta \ll \ell$, è

$$M_1^F M_\delta M_2^D = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -\ell/\beta_1^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ +\ell/\beta_2^2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 + \ell^2/\beta_2^2 & 2\ell \\ -\ell^3\delta/\beta_1^2\beta_2^2 & 1 - \ell^2/\beta_1^2 \end{pmatrix}$$

Se si cambia l'ordine ($M_1^D M_\delta M_2^F$) si scambiano tra loro i termini diagonali ma non cambiano gli altri. Quindi l'azione combinata dei due magneti è focalizzante in entrambe le proiezioni. Questo metodo di trasporto è detto *foccheggiamento forte* ed è utilizzato nei sincrotroni che accelerano protoni ad energia elevata con una serie di dipoli con numero d'ordine n elevato a *gradiente alternato* (Fig.1.31).

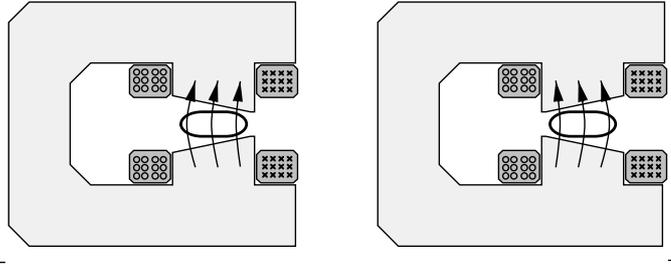


Figure 1.31: Dipoli curvanti a gradiente alternato

Nello schema di foccheggiamento forte con dipoli a gradiente alternato i magneti hanno la duplice funzione di curvare la traiettoria delle particelle e di limitare l'ampiezza delle oscillazioni di betatrone. Questo schema è utilizzato con successo nei proto-sincrotroni, ma ha lo svantaggio di non essere flessibile. Inoltre, in alcuni casi, occorre focalizzare il fascio di particelle per aumentarne il flusso. I *quadrupoli* sono magneti con elevato gradiente di campo che hanno la proprietà di focalizzare le traiettorie delle particelle in una proiezione (ma di defocalizzarla nell'altra proiezione) in una lunghezza limitata.

Un quadrupolo (Fig.1.32) è realizzato avvolgendo quattro bobine attorno a quattro espansioni polari simmetriche in modo da realizzare vicino all'asse un campo magnetico di componenti

$$B_x = 0 \quad B_y = \pm G z \quad B_z = \pm G y$$

G è il gradiente di campo che è positivo o negativo secondo il verso della corrente nelle bobine, ma uguale nelle due proiezioni poiché $\partial B_y/\partial z = \partial B_z/\partial y$. Le equazioni

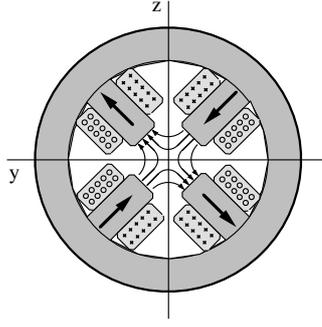


Figure 1.32: Quadrupolo

del moto di una particella di carica q , massa m e che ha velocità v lungo l'asse x sono

$$dp_y/dt = m\gamma\dot{y} = q(v_z B_x - v_x B_z) = \mp qvB_z = \mp qvG y$$

$$dp_z/dt = m\gamma\dot{z} = q(v_x B_y - v_y B_x) = \pm qvB_y = \pm qvG z$$

Passando a coordinate lungo la traiettoria, le equazioni diventano

$$m\gamma v^2 y'' = \mp qvG y \quad y'' \pm (qG/p) y = 0$$

$$m\gamma v^2 z'' = \pm qvG z \quad z'' \mp (qG/p) z = 0$$

e, scegliendo uno dei due versi, si hanno le soluzioni già trovate per i dipoli con gradiente di campo

$$M^F = \begin{pmatrix} \cos \ell/\beta & \beta \sin \ell/\beta \\ -\frac{1}{\beta} \sin \ell/\beta & \cos \ell/\beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -\ell/\beta^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^D = \begin{pmatrix} \cosh \ell/\beta & \beta \sinh \ell/\beta \\ +\frac{1}{\beta} \sinh \ell/\beta & \cosh \ell/\beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ +\ell/\beta^2 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\beta = \sqrt{p/qG}$. Invertendo il senso della corrente nelle bobine si inverte il segno del gradiente $G \rightarrow -G$ (equivale a ruotare il quadrupolo di $\pi/2$) e le conclusioni non cambiano. Un quadrupolo di lunghezza ℓ si comporta, per una particella di quantità di moto p , come una lente convergente in una proiezione e divergente nell'altra con distanze focali uguali, $f = p/qG\ell$. Una coppia di quadrupoli ha un'azione focalizzante in entrambe le proiezioni. I quadrupoli possono avere un gradiente di campo molto elevato e quindi una piccola distanza focale anche con lunghezze limitate. I moderni sincrotroni a foccheggiamento forte sono costituiti da un *reticolo* in cui l'elemento base, la *cella del reticolo*, è una serie di magneti curvanti con indice di campo $n = 1$ e una coppia di quadrupoli FD .

Finora abbiamo considerato un fascio monocromatico di particelle, cioè senza dispersione in impulso. In realtà le particelle durante l'accelerazione hanno impulsi

diversi e seguono traiettorie diverse. Introcucendo il *fattore di dispersione*, $\delta p/p = -\delta\omega/\omega$, l'equazione del moto nel piano radiale viene modificata

$$\ddot{y} + \omega^2 (1 - n) y = -\omega \delta\omega R = \omega^2 R \frac{\delta p}{p} \quad y'' + \frac{1 - n}{R^2} y = \frac{1}{R} \frac{\delta p}{p}$$

Questa ha soluzione

$$y = A \cos \frac{s}{\beta} + B \sin \frac{s}{\beta} + \frac{\beta^2}{R} \frac{\delta p}{p} \quad y' = -\frac{A}{\beta} \sin \frac{s}{\beta} + \frac{B}{\beta} \cos \frac{s}{\beta}$$

con le condizioni iniziali

$$y_o = A + \frac{\beta^2}{R} \left(\frac{\delta p}{p} \right)_o \quad y'_o = \frac{B}{\beta}$$

e la matrice di trasporto nel piano radiale diventa una matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \delta p/p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s/\beta & \beta \sin s/\beta & \frac{\beta^2}{R}(1 - \cos s/\beta) \\ -\frac{1}{\beta} \sin s/\beta & \cos s/\beta & \frac{\beta}{R} \sin s/\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \delta p/p \end{pmatrix}_o$$

1.3.8 Emittanza

Per un fascio di particelle, come in un fluido in assenza di effetti dissipativi, vale il *teorema di Liouville*: la densità $f(\vec{x}, \vec{p}, t) = d^6n/d\vec{r}d\vec{p}$ si conserva durante il moto nell'acceleratore. Questo impone alcune proprietà delle matrici di trasporto che descrivono le traiettorie nel piano trasverso e nel piano radiale. Le matrici sono unitarie e hanno $Det(M) = 1$. In generale le matrici di trasporto nel reticolo dell'acceleratore si esprimono

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos \mu + \begin{pmatrix} \eta & \beta \\ -\zeta & -\eta \end{pmatrix} \sin \mu$$

dove $\eta(s), \zeta(s), \beta(s)$ sono funzioni periodiche del reticolo e la condizione sul determinante è $\zeta\beta - \eta^2 = 1$.

In un reticolo periodico le equazioni del moto sono del tipo

$$y'' + \left(\frac{1}{R^2} + \frac{q}{p} \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) y = \frac{\delta p/p}{R} \quad z'' + \frac{q}{p} \frac{\partial B_y}{\partial z} z = 0$$

e la soluzione si può esprimere nella forma

$$y(s) = \sqrt{\varepsilon_y \beta(s)} \cos(\mu(s) + \phi) \quad \mu(s) = \int_s^{s+\ell} \frac{ds'}{\beta(s')}$$

dove $\beta(s)$ è la *funzione di betatrone* che ha dimensione $[m]$, $\mu(s)$ è la *fase di betatrone*, ℓ è il periodo del reticolo, ε_y e ϕ sono costanti. E analoga soluzione si ha nel piano verticale. La derivata della soluzione è

$$y' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} \frac{\beta'}{2} \cos(\mu + \phi) - \sqrt{\varepsilon \beta} \mu' \sin(\mu + \phi) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} \frac{\beta'}{2} \cos(\mu + \phi) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} \sin(\mu + \phi)$$

con le condizioni iniziali

$$y_o = \sqrt{\varepsilon \beta_o} \cos \phi \quad y'_o = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_o}} \frac{\beta'_o}{2} \cos \phi - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_o}} \sin \phi$$

$$y_o \frac{\beta'_o}{2} - \beta_o y'_o = \sqrt{\varepsilon \beta_o} \sin \phi$$

Tenuto conto che per questa soluzione si ha $\eta = -\beta'/2$, dalla relazione di unitarietà, $\zeta\beta = 1 + \beta'^2/4$, risulta

$$\varepsilon\beta_o = y_o^2 (1 + \beta_o'^2/4) - \beta_o\beta'_o y_o y'_o + \beta_o^2 y_o'^2 = \zeta_o\beta_o y_o^2 - \beta_o\beta'_o y_o y'_o + \beta_o^2 y_o'^2$$

$$\varepsilon = \zeta_o y_o^2 - \beta'_o y_o y'_o + \beta_o y_o'^2$$

Se calcoliamo per la soluzione i valori y^2 , yy' , y'^2

$$y^2 = \varepsilon\beta \cos^2 \mu \quad yy' = \varepsilon \left(\frac{\beta'}{2} \cos^2 \mu - \sin \mu \cos \mu \right)$$

$$y'^2 = \varepsilon \left(\frac{\beta'^2}{4\beta} \cos^2 \mu - \frac{\beta'}{\beta} \sin \mu \cos \mu + \frac{1}{\beta} \sin^2 \mu \right)$$

troviamo che ε_y è una costante del moto

$$\zeta y^2 - \beta' yy' + \beta y'^2 = \varepsilon_y$$

Questa, tenuto conto della relazione tra i coefficienti, è l'equazione di un'ellisse nel piano $y - y'$, con centro in $y = 0$, $y' = 0$, e ogni particella nel moto lungo l'acceleratore ha valori delle coordinate $y(s)$, $y'(s)$ che cambiano da punto a punto, ma sempre su un'ellisse. Nel caso che sia $\beta' = 0$, $\zeta = \frac{1}{\beta}$, l'equazione diventa

$$\frac{y^2}{\beta} + \beta y'^2 = \varepsilon_y$$

e l'ellisse ha assi paralleli alle coordinate e semiassi uguali a $\sqrt{\varepsilon_y \beta}$ e $\sqrt{\varepsilon_y / \beta}$. Tutte queste considerazioni sono anche valide nel piano $z - z'$. L'area dell'ellissi è pari a $\pi\varepsilon$, ed è chiamata *emittanza* [$m \times rad$] e rappresenta l'estensione dello spazio delle fasi occupato dal fascio nel piano $y - y'$ ($z - z'$).

Per ogni coppia di *variabili coniugate* (y, p_y) , (z, p_z) , in assenza di effetti dissipativi, si ha lungo un ciclo $\oint p_y dy = \text{costante}$, $\oint p_z dz = \text{costante}$

$$p_y = m\gamma\dot{y} = mc\beta\gamma y' \quad \oint \beta\gamma y' dy = \beta\gamma\pi\varepsilon_y = \text{costante}$$

e analogamente $\beta\gamma\pi\varepsilon_z = \text{costante}$. La quantità $\beta\gamma\pi\varepsilon$ è chiamata *emittanza invariante*. Quando il fascio aumenta l'energia (l'aumento in un ciclo è molto piccolo) le emittanze $\beta\gamma\pi\varepsilon$ si mantengono costanti e lo spazio delle fasi, $\pi\varepsilon$, occupato dal fascio nei piani $y - y'$, $z - z'$, diminuisce proporzionalmente a $1/\beta\gamma$. Poiché l'emittanza definisce le dimensioni della camera a vuoto in cui circola il fascio e $\pi\varepsilon$ è molto maggiore all'iniezione che alla fine del ciclo di accelerazione, per accelerare particelle ad energia elevata si usano di solito acceleratori in cascata in modo da limitare l'emittanza all'iniezione.

1.3.9 Oscillazioni di sincrotrone

Gli acceleratori di alta energia funzionano con il principio di accelerazioni multiple e le particelle, per aumentare l'energia, devono passare nelle cavità RF in fase con il campo elettrico acceleratore a frequenza ω_{RF} . Poiché le particelle hanno una dispersione nel tempo di attraversamento delle cavià, δt , l'aumento di energia è possibile se piccole variazioni di fase $\delta\phi = \omega_{RF}\delta t$ vengono compensate. Le condizioni di *stabilità di fase* sono state dimostrate da Veksler e McMillan nel 1945.

Se $\Delta V = V_o \sin \omega_{RF}t$ è la differenza di potenziale nella cavità, una particella che la attraversa ha una variazione di energia $qV_o \sin(\omega_{RF}t + \phi)$, dove ϕ è la fase che tiene conto dell'istante di attraversamento. Definiamo *particella sincrona* la particella che percorre l'orbita di riferimento e che sia sempre in fase: $\phi_s = \text{costante}$, questa ha frequenza $\omega_s = \omega_{RF}/h$ con $h = \text{intero}$ e ha energia E_s .

Consideriamo l'esempio dell'acceleratore lineare (Fig.1.33). Una generica parti-

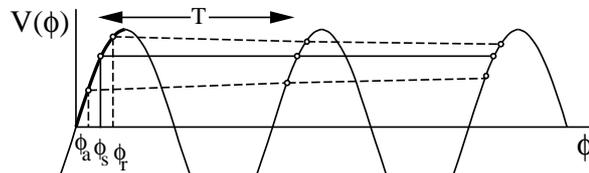


Figure 1.33: Stabilità di fase nel LINAC

cella ha energia $E = E_s + \delta E$, fase $\phi = \phi_s + \delta\phi$ e frequenza $\omega = \omega_s + \delta\omega$. Dopo aver attraversato la cavità la particella ha energia

$$\begin{aligned} E' &= E_s + \delta E + qV_o \sin(\phi_s + \delta\phi) = \\ &= E_s + qV_o \sin \phi_s \cos \delta\phi + \delta E + qV_o \cos \phi_s \sin \delta\phi \approx E'_s + \delta E + qV_o \delta\phi \cos \phi_s \end{aligned}$$

La variazione di energia rispetto alla particella sincrona è $\delta E' = \delta E + qV_o \delta\phi \cos \phi_s$. Supponiamo che la particella abbia energia maggiore di E_s e che sia in anticipo di fase, $\delta\phi < 0$: la variazione di energia è minore se $\delta\phi \cos \phi_s < 0$, e la particella si avvicina alla particella sincrona se $\cos \phi_s > 0$. Se la particella ha energia minore di E_s ed è in ritardo di fase, $\delta\phi > 0$, la variazione di energia è maggiore se $\delta\phi \cos \phi_s > 0$, e la particella si avvicina alla particella sincrona se $\cos \phi_s > 0$. Quindi in entrambe i casi si ha stabilità di fase se $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. Poiché per aumentare l'energia deve essere $0 < \phi < \pi$, le particelle che attraversano la cavità con $0 < \phi < \pi/2$ vengono accelerate e oscillano attorno alla fase della particella sincrona. Queste oscillazioni di fase (e di energia) sono chiamate *oscillazioni di sincrotrone*.

In un acceleratore circolare particelle di impulso diverso percorrono traiettorie diverse e hanno frequenze angolari diverse (Fig.1.34). Il rapporto tra la variazione della lunghezza dell'orbita, ℓ , e la variazione di impulso è un parametro dell'acceleratore chiamato *fattore di compressione di impulso*

$$\alpha_p = \frac{d\ell/\ell}{dp/p}$$

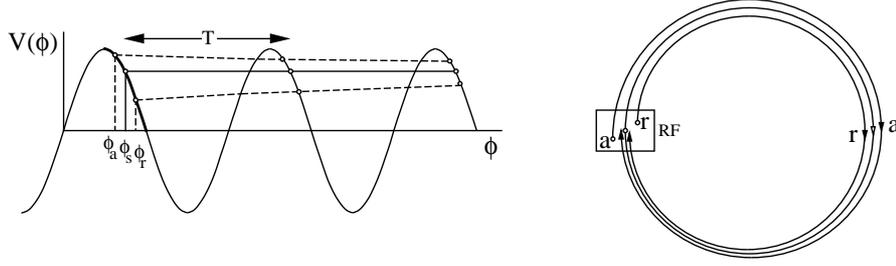


Figure 1.34: Stabilità di fase nell'acceleratore circolare

Il rapporto tra la variazione della frequenza angolare e la variazione di impulso

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dr}{r} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} - \alpha_p \frac{dp}{p} \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\beta}{\beta} + \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{d\beta}{\beta} + \beta^2 \gamma^2 \frac{d\beta}{\beta} = \gamma^2 \frac{d\beta}{\beta}$$

è legato a α_p e dipende dall'energia

$$\eta = \frac{d\omega/\omega}{dp/p} = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p$$

quindi negli acceleratori circolari si può avere stabilità di fase in condizioni diverse secondo se la velocità aumenta più rapidamente della lunghezza della traiettoria (a bassa energia) o più lentamente (ad alta energia) passando per una *energia di transizione* quando $1/\gamma^2 = \alpha_p$.

Se indichiamo con $\Delta E = qV_0 \sin \phi$ la variazione di energia per giro e se facciamo l'ipotesi che le variazioni siano lente rispetto alla frequenza, la variazione della differenza di energia rispetto alla particella sincrona in un periodo T è

$$\Delta \delta E = qV_0 (\sin \phi - \sin \phi_s) \approx \frac{d\delta E}{dt} T \quad \frac{d\delta E}{dt} \approx \frac{qV_0}{2\pi} \omega_s (\sin \phi - \sin \phi_s)$$

la variazione della fase in un periodo è ($\delta T/T = -\delta\omega/\omega = -\eta\delta p/p$)

$$\Delta \delta \phi \approx \omega_s \delta T \approx -\omega_{RF} T \eta \frac{\delta p}{p} = -\omega_{RF} T \eta \frac{\delta E}{\beta_s^2 E} \quad \frac{d\delta \phi}{dt} \approx \frac{\Delta \delta \phi}{T} = -\frac{\omega_{RF} \eta}{\beta_s^2 E_s} \delta E$$

Da queste relazioni si ottiene l'equazione della fase

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta \phi = -\frac{\omega_{RF} \eta}{\beta_s^2 E_s} \frac{d}{dt} \delta E = -h \frac{\omega_s^2 \eta}{2\pi \beta_s^2} \frac{qV_0}{E_s} (\sin \phi - \sin \phi_s)$$

che, per piccoli sfasamenti, $\sin \phi = \sin(\phi_s + \delta\phi) \approx \sin \phi_s + \delta\phi \cos \phi_s$, diventa

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta \phi + \Omega_s^2 \delta \phi = 0 \quad \Omega_s = \omega_s \left(\frac{h\eta \cos \phi_s}{2\pi \beta_s^2} \frac{qV_0}{E_s} \right)^{1/2}$$

Si hanno oscillazioni di fase se Ω_s è reale. Sotto l'energia di transizione, $\eta > 0$, si ha stabilità di fase per $\cos \phi_s > 0$, cioè $0 < \phi < \pi/2$ come nel caso del *LINAC*.

Infatti in un acceleratore lineare il raggio di curvatura è infinito, $\alpha_p = 0$ e η è sempre positivo. Sopra l'energia di transizione, $\eta < 0$, si ha stabilità di fase per $\cos \phi_s < 0$, quindi $\pi/2 < \phi < \pi$. Questo è il caso dell'elettro-sincrotrone in cui γ è grande e si fa in modo di operare sempre sopra l'energia di transizione. La maggior parte dei protosincrotroni devono passare attraverso l'energia di transizione durante il ciclo di accelerazione e quindi devono effettuare un cambiamento della fase di ω_{RF} .

1.3.10 Anelli di collisione

In esperimenti di fisica subnucleare è importante convertire l'energia cinetica delle particelle nello stato iniziale in energia disponibile nello stato finale per produrre particelle di massa elevata. Negli esperimenti in cui si invia un fascio di particelle di impulso \vec{p} su un bersaglio fermo nel laboratorio parte dell'energia del fascio non è disponibile per produrre particelle perché viene utilizzata per conservare l'impulso totale. Se invece si fanno collidere due fasci che nel laboratorio hanno impulso uguale e opposto tutta l'energia è disponibile nello stato finale perché l'impulso totale nel laboratorio è nullo. L'energia nello stato finale è pari al modulo del quadri-impulso. In un esperimento a bersaglio fisso si ha ($c = 1$), $P_1 = (\vec{p}_1, E_1)$, $P_2 = (0, m_2)$

$$(P_1 + P_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2$$

In un esperimento a fasci collidenti, $P_1 = (\vec{p}, E_1)$, $P_2 = (-\vec{p}, E_2)$

$$(P_1 + P_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 + 2p^2$$

Per $E \gg m$ si ha $E_{cm} \approx \sqrt{2Em}$ nel primo caso e $E_{cm} = 2E$ nel secondo.

Particelle di carica q con impulso \vec{p} e antiparticelle di carica opposta $-q$ con impulso opposto $-\vec{p}$ possono essere accelerate nello stesso anello utilizzando lo stesso campo elettrico acceleratore e lo stesso campo magnetico curvante. Infatti la forza acceleratrice è nei due casi parallela all'impulso e la forza centripeta è la stessa

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad \frac{d}{dt}(-\vec{p}) = -q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Un parametro importante degli anelli di collisione è la *luminosità* che definisce il numero di reazioni che avvengono nell'unità di tempo. Per un esperimento a bersaglio fisso abbiamo definito la luminosità come il prodotto *flusso del fascio* \times *numero di particelle bersaglio*. In un anello di collisione, con N_1 e N_2 particelle per fascio, la luminosità è

$$L = \frac{N_1}{S\Delta t} N_2 = f \frac{N_1 N_2}{S}$$

dove f è la frequenza di incrocio dei fasci e S è la superficie di sovrapposizione dei fasci. Per avere luminosità elevata occorre ridurre al minimo la sezione dei fasci nel punto di incrocio cioè ridurre il valore di β con quadrupoli focalizzanti.

Gli anelli di collisione, una volta accelerati i fasci all'energia di operazione, funzionano in regime continuo. Il numero di particelle circolanti diminuisce col tempo per

effetto delle interazioni delle particelle con il gas residuo nella camera a vuoto e con le altre particelle. Un'altro parametro importante è la *vita media* della luminosità che è tipicamente di alcune ore. Oltre agli anelli di collisione protone-antiprotone e elettrone-positrone, che funzionano con un solo anello, sono utilizzati anche anelli di collisione protone-protone e elettrone-protone che però funzionano con due anelli distinti che si incrociano in più punti.

1.3.11 Radiazione di sincrotrone

Una carica elettrica accelerata emette radiazione elettromagnetica. L'energia emessa per unità di tempo è data dalla formula di Larmor (appendice ???) ed è invariante

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} c^2 \gamma^4 \left[\gamma^2 \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \right] \quad [eV \ s^{-1}]$$

La potenza emessa dipende dalla quarta potenza di $\gamma = E/mc^2$ e quindi, a parità di energia, è molto maggiore per particelle di massa piccola (elettroni) che non per masse grandi (protoni).

In un acceleratore lineare l'accelerazione è parallela alla velocità, $d\vec{\beta}/dt \parallel \vec{\beta}$, e la potenza è

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c} \gamma^4 (\gamma^2 \beta^2 + 1) \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c} \gamma^6 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2$$

Poiché per valori grandi di γ , $\beta \rightarrow 1$ e $d\beta/dt$ è molto piccolo, negli acceleratori lineari l'energia emessa è molto piccola ed è facilmente compensata dal campo elettrico accelerante.

In un acceleratore circolare vi è una accelerazione centripeta ortogonale alla velocità, $d\vec{\beta}/dt \perp \vec{\beta}$. Trascurando l'accelerazione longitudinale, che è molto più piccola, la potenza è

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c} \gamma^4 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2$$

L'accelerazione centripeta è $d\vec{\beta}/dt = \vec{\omega} \wedge \vec{\beta}$. Se R è il raggio di curvatura, l'accelerazione è $|d\beta/dt| = \beta^2 c/R$ e la potenza è

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} c \frac{\beta^4 \gamma^4}{R^2}$$

L'energia emessa per giro, che deve essere fornita dalle cavità RF , è

$$\Delta E_{giro} = \oint W dt \approx WT = \frac{2\pi R}{\beta c} \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} c \frac{\beta^4 \gamma^4}{R^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\beta^3 \gamma^4}{R}$$

Per un elettrone, $e^2/4\pi\epsilon_0 = r_e m_e c^2$,

$$W = \frac{2}{3} \frac{r_e c}{R^2} m_e c^2 \beta^4 \gamma^4 \quad \Delta E_{giro} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{R} m_e c^2 \beta^3 \gamma^4$$

La radiazione emessa si chiama *radiazione di sincrotrone*. Negli elettro-sincrotroni di alta energia l'energia fornita dalle cavità *RF* è spesa per compensare l'energia emessa per radiazione di sincrotrone più che per accelerare i fasci. Negli anelli di collisione elettrone-positrone, anche quando è stata raggiunta l'energia di operazione, occorre continuamente rifornire con le cavità *RF* l'energia irraggiata. Poiché ΔE_{giro} è inversamente proporzionale a R , gli anelli di collisione e^+e^- di alta energia sono costruiti con grandi raggi di curvatura.

La radiazione di sincrotrone ha comunque benefici effetti sul comportamento dei fasci negli acceleratori di elettroni. L'emissione di radiazione è un effetto non conservativo che viola il teorema di Liouville e che può essere utilizzato per attenuare l'ampiezza delle oscillazioni di betatrone e quindi per ridurre lo spazio delle fasi nel piano trasverso. La dispersione angolare del fascio è $\langle \theta \rangle = \sqrt{\epsilon/\beta}$ mentre l'angolo di emissione della radiazione è $\approx 1/\gamma$, come illustrato nel seguito. Se $1/\gamma \ll \langle \theta \rangle$ l'emissione di radiazione non cambia apprezzabilmente la direzione dell'elettrone e il risultato è che si riducono sia la componente trasversa che la componente longitudinale della quantità di moto, $p'_T = ap_T$, $p'_L = ap_L$, con $a < 1$. Le cavità risonanti accelerano l'elettrone nella direzione longitudinale in modo da compensare l'energia irraggiata, $p''_L = p_L$, con il risultato che si riduce l'angolo $\theta'' = p''_T/p''_L = a\theta$. Quindi, sfruttando l'emissione di radiazione di sincrotrone si possono ottenere fasci di piccole dimensioni nel piano trasverso e questo permette di ottenere elevate luminosità negli anelli di collisione e^+e^- .

Una importante applicazione della radiazione di sincrotrone emessa da acceleratori circolari di elettroni è la produzione di sorgenti di radiazione elettromagnetica con particolari caratteristiche di intensità, direzionalità e banda di frequenza. Nel riferimento solidale con la particella carica la distribuzione angolare della potenza emessa (appendice ???) è

$$\frac{dW}{d\Omega'} = \frac{r_e m_e c^2}{4\pi c} \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \sin^2 \psi$$

dove ψ è l'angolo tra l'accelerazione e la direzione di emissione (Fig.1.35). Nel

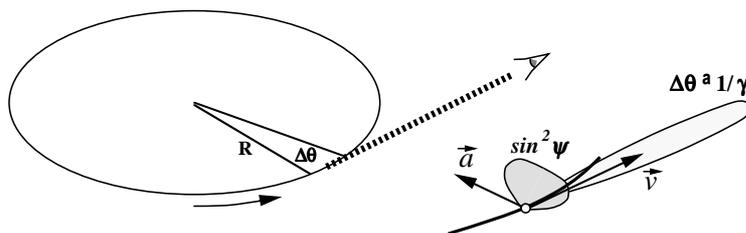


Figure 1.35: Emissione di radiazione di sincrotrone

laboratorio la carica ha velocità βc e la distribuzione della radiazione emessa ad angolo polare θ rispetto alla direzione della velocità è

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{r_e m_e c^2}{4\pi c} \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right)$$

Per $\beta \rightarrow 1$, $\beta \approx 1 - 1/2\gamma^2$, l'angolo solido si contrae, $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, e la distribuzione angolare, mediando sull'angolo azimutale ϕ , diventa

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{r_e m_e c^2}{4\pi c} \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \frac{8\gamma^6}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left(1 - \frac{2\gamma^2 \theta^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right)$$

Il valore massimo della distribuzione si ha per $\theta = 1/2\gamma$ e il valore quadratico medio della distribuzione è $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} = 1/\gamma$: la radiazione di sincrotrone è concentrata in un cono di semiapertura $\approx 1/\gamma$ attorno alla direzione del moto della carica.

Il calcolo dello spettro di frequenza emesso è piuttosto complicato. Per valutare le frequenze tipiche consideriamo una carica in moto in un anello di raggio R . Un osservatore sul piano dell'anello vede la radiazione emessa lungo un tratto $\Delta\ell \approx R\Delta\theta \approx R/\gamma$. La durata dell'impulso τ è la differenza tra il tempo di percorrenza del tratto $\Delta\ell$ a velocità βc da parte dell'elettrone e il tempo di percorrenza della corda $2R \sin \Delta\theta/2$ a velocità c da parte della radiazione

$$\tau = \frac{R}{\gamma\beta c} - \frac{2R \sin 1/2\gamma}{c} = \frac{R}{\beta\gamma c} (1 - \beta) \approx \frac{R}{\beta\gamma c} \frac{1 - \beta^2}{2}$$

Lo spettro in frequenza è la trasformata di Fourier della distribuzione temporale. Se assumiamo un impulso uniforme di durata τ , lo spettro in frequenza è approssimativamente uniforme e si estende fino alla

$$\text{frequenza critica} \quad \omega_c = \frac{1}{\tau} = 2\gamma^3 \omega_o$$

dove $\omega_o = \beta c/R$ è la frequenza di rivoluzione del fascio. Acceleratori circolari di elettroni di alta energia producono fasci intensi e collimati di raggi X con energia fino a $\approx 10 \text{ keV}$ cioè lunghezza d'onda $\lambda \approx 1 \text{ \AA}$ e vengono utilizzati per lo studio delle proprietà di strutture molecolari e cristalline.

Calcoli accurati dimostrano che lo spettro di potenza emessa sotto forma di radiazione di sincrotrone è rappresentato da una funzione universale del rapporto $x = \omega/\omega_c$

$$\frac{dW}{d\omega} = \hbar\omega \frac{d\dot{N}_\gamma}{d\omega} = \frac{W}{\omega_c} S(\omega/\omega_c)$$

con $\int S(x) dx = 1$. La funzione di distribuzione $S(x)$ è mostrata in Fig.1.36. Per $\omega \ll \omega_c$ aumenta con una legge di potenza ben approssimata con $S(x) = 1.333 x^{1/3}$, mentre per $\omega \gg \omega_c$ decresce esponenzialmente: $S(x) = 0.777 x^{1/2} e^{-x}$.

1.3.12 Sorgenti di radiazione di sincrotrone

I magneti curvanti di un elettro-sincrotrone costituiscono una sorgente di radiazione di sincrotrone. La radiazione è emessa nel piano di curvatura lungo la direzione degli elettroni in un cono di apertura angolare $\Delta\theta \simeq 1/\gamma$. L'intensità della radiazione è proporzionale al numero di elettroni che circolano nell'anello e lo spettro di frequenza è dato dalla funzione $S(\omega/\omega_c)$ che si estende fino a valori di energia poco superiori a

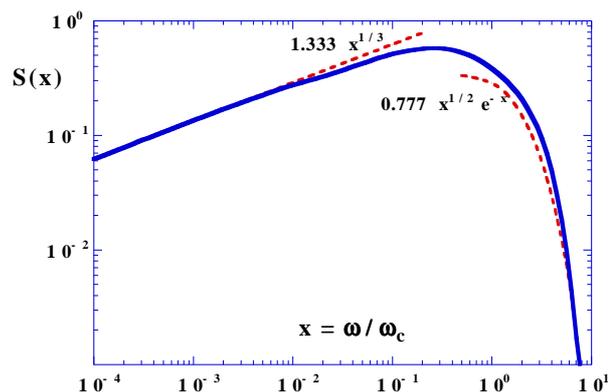


Figure 1.36: Funzione universale che descrive lo spettro della radiazione di sincrotrone

$\hbar\omega_c$. L'energia perduta sotto forma di radiazione viene continuamente rifornita agli elettroni dal campo accelerante a radio-frequenza, quindi gli elettroni producono continuamente radiazione di sincrotrone. Le caratteristiche della radiazione (intensità, spettro di frequenza, polarizzazione, ...) possono essere variate localmente nell'acceleratore inserendo opportuni componenti magnetici che non perturbino la struttura periodica dell'anello.

Traslatore di frequenza

Se nell'anello si inserisce un campo magnetico, B^* , di intensità maggiore di quello dei magneti curvanti, aumenta localmente la forza di Lorentz e quindi la frequenza angolare, $\omega_o = eB^*/m\gamma$. In questo modo si aumenta la frequenza critica della radiazione emessa localmente dal magnete *superbend* B^* .

Un *traslatore di frequenza* di questo tipo (Fig.1.37) si realizza, ad esempio, inserendo in una sezione dritta dell'anello due magneti compensatori posti prima e dopo il magnete B^* in modo che l'integrale di campo dei tre magneti sia nullo, $\int B dl = 0$, per non cambiare le caratteristiche del fascio di elettroni.

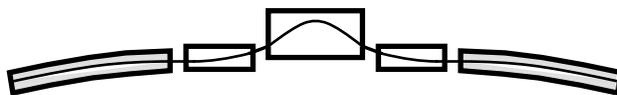


Figure 1.37: Traslatore di frequenza; sono mostrati due magneti curvanti dell'anello, i due magneti compensatori e il magnete superbend

Magnete wiggler

Possiamo estendere il concetto del traslatore di frequenza in una struttura periodica in cui il campo magnetico è ortogonale alla direzione degli elettroni e l'integrale di campo è nullo. Un magnete *wiggler* è realizzato con N elementi di lunghezza λ_p

(Fig.1.38) realizzati con elettro-magneti o con magneti permanenti. L'intensità del campo magnetico si può ottenere come sviluppo in serie di Fourier con componente fondamentale di periodo λ_p . Con riferimento alla Fig.1.38, x è la direzione iniziale degli elettroni che vengono deflessi nel piano x - y . Assumendo per le componenti del campo magnetico $B_z(x, y, z) = B_o f(z) \cos kx$, con $k = 2\pi/\lambda_p$, e $B_y(x, y, z) = 0$, la soluzione deve soddisfare le condizioni

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= 0 & \partial B_x / \partial z &= \partial B_z / \partial x = -k B_o f(z) \sin kx \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \partial B_x / \partial x &= -\partial B_z / \partial z = -B_o f'(z) \cos kx \\ \partial^2 B_x / \partial x \partial z &= \partial^2 B_x / \partial z \partial x & -k^2 B_o f(z) \cos kx &= -B_o f''(z) \cos kx \end{aligned}$$

L'equazione $f''(z) - k^2 f(z) = 0$ ha soluzione $f(z) = a \cosh kz + b \sinh kz$ con le

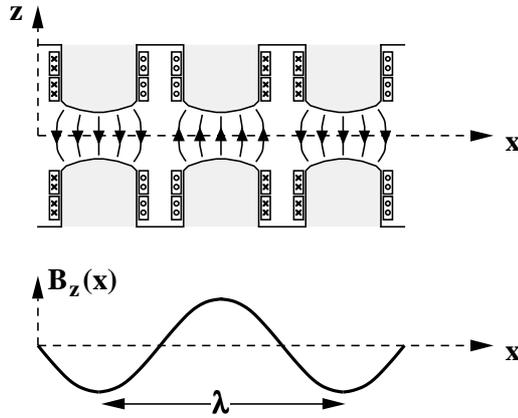


Figure 1.38: Magnete wiggler; la struttura periodica si estende per N periodi di lunghezza λ

condizioni al contorno $f(0) = a = 1$, $f(-z) = f(+z)$ cioè $b = 0$. La componente B_x si ottiene integrando una delle relazioni precedenti. Quindi le componenti del campo magnetico sono

$$B_x = B_o \sinh kz \sin kx \quad B_y = 0 \quad B_z = B_o \cosh kz \cos kx$$

L'angolo di deflessione nel piano x - y in un quarto di periodo è

$$\theta_{p/4} = \int_0^{\lambda_p/4} \frac{eB_o \cos kx}{p} dx = \frac{eB_o}{kp}$$

Ricordando che il valor medio dell'apertura del cono di emissione di radiazione di sincrotrone è $\langle \theta \rangle \simeq 1/\gamma$, il rapporto tra l'angolo di deflessione in un quarto di periodo e l'apertura del cono definisce il *fattore di intensità* del magnete wiggler

$$Q = \frac{\theta_{p/4}}{\langle \theta \rangle} = \frac{eB_o}{kp} \frac{E}{mc^2} = \frac{ecB_o}{kmc^2} \frac{E}{pc} \simeq \frac{ec}{2\pi mc^2} B_o \lambda_p$$

$ec = 0.3 \text{ GeV}/T \text{ m}$, $mc^2 = 0.5 \text{ MeV}$; quindi: $Q \simeq 100 B_o(T) \lambda_p(m) = B_o(T) \lambda_p(cm)$. Tipicamente i magneti wiggler hanno $Q \simeq 1$. I magneti wiggler con $Q \ll 1$ sono chiamati *ondulatori*.

Gli elettroni sono soggetti ad una accelerazione nel piano normale alla direzione del campo magnetico. Le equazioni del moto nel piano x - y sono

$$\begin{aligned} m\gamma\ddot{x} &= -e(v_y B_z - v_z B_y) = -e\dot{y}B_z & \ddot{x} &= -\omega_o\dot{y} \cos kx \\ m\gamma\ddot{y} &= -e(v_z B_x - v_x B_z) = +e\dot{x}B_z & \ddot{y} &= +\omega_o\dot{x} \cos kx \\ m\gamma\ddot{z} &= -e(v_x B_y - v_y B_x) = 0 \end{aligned}$$

con $\omega_o = eB_o/m\gamma$. La soluzione approssimata della seconda equazione si ottiene assumendo che la velocità lungo l'asse x sia costante, $dx/dt \simeq \text{costante} = v_o$,

$$\dot{y} = \omega_o v_o \int \cos kx \, dt = \frac{\omega_o}{k} \sin kx + C$$

con la condizione iniziale $\dot{y}_{x=0} = C = 0$. Sostituendo nella prima equazione si ha

$$\dot{x} = -\frac{\omega_o^2}{k} \int \sin kx \cos kx \, dt = -\frac{\omega_o^2}{2k^2 v_o} \sin^2 kx + C$$

con la condizione iniziale $\dot{x}_{x=0} = C = v_o$

$$\dot{x} = v_o \left(1 - \frac{\omega_o^2}{2k^2 v_o^2} \sin^2 kx \right) = v_o \left(1 - \frac{Q^2}{2\gamma^2} \sin^2 kx \right)$$

La componente v_x della velocità degli elettroni oscilla con periodo λ_p attorno al valor medio $\bar{v}_x = v_o(1 - Q^2/4\gamma^2)$. La componente v_y ha valore massimo $\omega_o/k = v_o Q/\gamma \ll v_o$. Integrando l'espressione di \dot{y}

$$y(x) = \frac{\omega_o}{k} \int \sin kx \, dt = \frac{\omega_o}{k^2 v_o} \cos kx + C$$

si ottiene l'ampiezza dell'oscillazione trasversa $y_{max} = (Q/2\pi\gamma)\lambda_p \ll \lambda_p$.

La potenza media emessa da un elettrone è ($|\ddot{x}| \ll |\ddot{y}|$, $\ddot{y} = c\omega_o \cos kx$)

$$W = \frac{2}{3} \frac{r_e m_e c^2}{c^3} \gamma^4 \langle \ddot{y}^2 \rangle = \frac{1}{3} \frac{r_e m_e c^2}{c} \gamma^4 \omega_o^2 = \frac{4\pi^2}{3} m_e c^2 \frac{r_e c}{\lambda_p^2} \gamma^2 Q^2$$

e l'energia irradiata da un elettrone in un onduttore di N elementi è

$$\Delta E = NW \frac{\lambda_p}{\beta c} = \frac{4\pi^2}{3} m_e c^2 \frac{r_e}{\lambda_p} N \gamma^2 Q^2$$

In un onduttore costituito di N elementi gli elettroni compiono oscillazioni con periodo $T \simeq \lambda_p/\beta c$ ed emettono radiazione *quasi monocromatica*. In un periodo, la radiazione emessa ad angolo polare θ rispetto all'asse dell'onduttore percorre la distanza $cT = \lambda_p/\beta(1 - Q^2/\gamma^2)$ e si ha emissione coerente se la differenza di percorso

tra la radiazione emessa da due punti a distanza λ_p è pari ad un numero intero di lunghezze d'onda (Fig.1.39)

$$\frac{\lambda_p}{\beta(1 - Q^2/\gamma^2)} - \lambda_p \cos \theta = n\lambda = n \frac{2\pi c}{\omega}$$

Approssimando $\beta = 1 - 1/2\gamma^2 + \dots$, $\cos \theta = 1 - \theta^2/2 + \dots$, si ottiene che lo spettro della radiazione è piccato attorno alle frequenze

$$\omega_n = n \frac{2\gamma^2}{1 + Q^2/2 + \gamma^2\theta^2} \frac{2\pi c}{\lambda_p}$$

La frequenza delle armoniche è massima per radiazione emessa in avanti, $\theta \simeq 0$, e per $Q \ll 1$, e la larghezza delle *righe* è inversamente proporzionale al numero di elementi, N . Si possono selezionare diverse bande di frequenza variando l'angolo di osservazione.

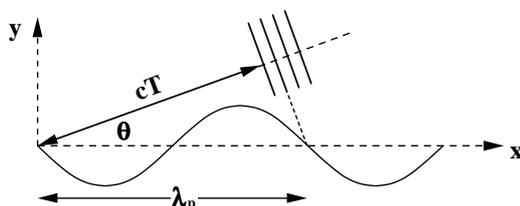


Figure 1.39: Radiazione quasi monocromatica emessa da un ondulatorio

1.3.13 Sorgenti di neutroni

I neutroni, insieme ai protoni, sono i costituenti dei nuclei atomici (*nucleoni*); hanno massa $m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$, carica elettrica nulla, sono fermioni di spin 1/2 con momento magnetico $\mu_n = -1.91$ in unità $e\hbar/2m_p$. I neutroni non esistono liberi, decadono con vita media sufficientemente lunga ($\tau = 900 \text{ s}$) per poterli utilizzare come proiettili in esperimenti. A differenza di fotoni, elettroni e protoni, i neutroni interagiscono molto debolmente con gli elettroni atomici e, per questo, sono più penetranti e particolarmente indicati come sonde per studiare la struttura e le proprietà della materia.

I neutroni *termici*, quelli con energia cinetica media $kT_{amb} = 0.025 \text{ eV}$, hanno lunghezza d'onda di De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{(2mc^2 kT)^{1/2}} = 1.8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

confrontabile con le distanze interatomiche nei cristalli o in materiale organico. Questo fu evidenziato da Brockhouse e Shull ²⁶ che svilupparono il metodo della spettroscopia neutronica per lo studio della materia condensata.

²⁶ premi Nobel per la fisica nel 1994

Sorgenti di neutroni termici si realizzano nei reattori nucleari (capitolo ???) che producono enormi flussi di neutroni nella fissione di nuclei pesanti, oppure con interazioni nucleari di fasci di protoni (o ioni) su bersagli di nuclei pesanti. Nel primo caso si ha una sorgente continua, nel secondo caso si può realizzare una sorgente pulsata alla frequenza di estrazione del fascio da un acceleratore e questo presenta notevoli vantaggi perché si può stabilire una coerenza temporale tra il ciclo dell'acceleratore e la produzione dei neutroni.

Il processo in cui si produce un gran numero di neutroni in una singola interazione protone-nucleo è chiamato *spallazione*. Se i protoni hanno lunghezza d'onda molto minore della distanza tra i costituenti del nucleo, $\lambda \ll 10^{-15} \text{ m}$, ovvero energia cinetica $\geq 500 \text{ MeV}$, e se il bersaglio è un nucleo con peso atomico elevato con un eccesso di neutroni rispetto ai protoni, il processo di spallazione si può schematizzare sulla base del modello nucleare statistico di Fermi (capitolo ???) nel modo seguente:

- l'interazione avviene tra il protone e un singolo nucleone che viene emesso dal nucleo;
- il nucleo viene a trovarsi in uno stato eccitato con un eccesso di energia di $\Delta E = 50 \div 100 \text{ MeV}$;
- questa energia viene dissipata con l'emissione di $\frac{\Delta E}{\langle E_{legame} \rangle} \approx 10 \div 15$ neutroni, *evaporazione nucleare*, mentre i protoni vengono trattenuti nel nucleo dalla barriera di potenziale coulombiana;
- il nucleo residuo non è stabile perché contiene un eccesso di protoni ed è soggetto ad una serie di decadimenti β^+ in cascata.

Il processo di evaporazione nucleare avviene in tempi molto brevi ($\tau \sim 10^{-20} \text{ s}$). La sezione d'urto differenziale dei neutroni prodotti con un fascio di protoni di 590 MeV è mostrata in Fig.1.40 in funzione dell'energia e dell'angolo polare. Da questi risultati si osserva che

- l'energia cinetica media dei neutroni è $\sim 2 \text{ MeV}$;
- la maggior parte dei neutroni è prodotta in modo isotropo con energia minore di 10 MeV;
- i neutroni con energia maggiore di $\sim 10 \text{ MeV}$ sono emessi preferenzialmente in avanti, ma con probabilità molto piccola.

Come bersaglio si usano nuclei pesanti non soggetti a fissione, per evitare l'emissione di neutroni *ritardati*: Tantalio, Tungsteno, Piombo, Il nucleo più efficace come moderatore è l'Idrogeno, utilizzato sotto forma di H_2O a temperatura ambiente, oppure H_2 liquido a $T = 20 \text{ K}$ per produrre neutroni *freddi* con energia 2 meV e lunghezza d'onda $\lambda = 7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

In una collisione elastica di una particella di massa m e impulso p_0 ($p_0 \ll mc^2$) con una particella di massa M a riposo, l'impulso nel centro di massa è $p^* = \frac{Mp_0}{M+m}$ e

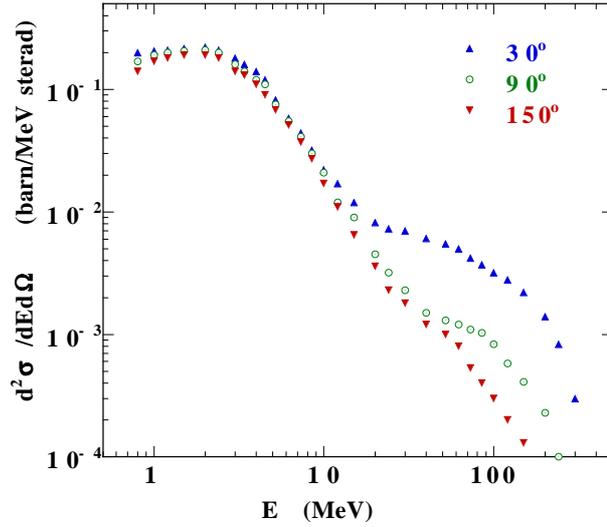


Figure 1.40: Sezione d'urto differenziale di neutroni di spallazione prodotti da protoni di 590 MeV su un bersaglio di Pb

la velocità del centro di massa è $\frac{p_0}{M+m}$ (Fig.1.41). L'energia cinetica dopo la collisione è

$$E = \frac{(\vec{p}^* + \vec{p}')^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m} \frac{M^2 + 2Mm \cos \theta^* + m^2}{(M + m)^2}$$

dove θ^* è l'angolo di diffusione nel centro di massa. In una collisione di un neutrone con un nucleo di massa Am l'energia cinetica è

$$E = \frac{A^2 + 2A \cos \theta^* + 1}{(A + 1)^2} E_0 = \left(\frac{1 + \alpha}{2} + \frac{1 - \alpha}{2} \cos \theta^* \right) E_0$$

con $\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$. L'angolo di diffusione è

$$p \sin \theta = p^* \sin \theta^* \quad \cos \theta = \frac{A + \cos \theta^*}{(A^2 + 2A \cos \theta^* + 1)^{1/2}}$$

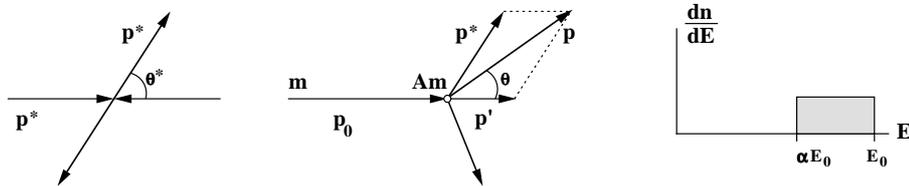


Figure 1.41: Collisione di un neutrone di massa m e impulso p_0 con un nucleo di massa Am nel centro di massa e nel laboratorio

Per energie cinetiche $E_0 \sim 2 \text{ MeV}$ la distribuzione angolare nel centro di massa è uniforme, $\frac{dn}{d \cos \theta^*} = \frac{1}{2}$, e l'energia dopo la collisione è compresa tra $E_{min} = \alpha E_0$,

quando $\theta^* = \pi$, e $E_{max} = E_0$, quando $\theta^* = 0$, con distribuzione uniforme

$$\frac{dn}{dE} = \frac{dn}{d \cos \theta^*} \frac{d \cos \theta^*}{dE} = \frac{1}{(1 - \alpha)E_0}$$

L'energia dei neutroni viene degradata nelle successive collisioni in modo esponenziale e per calcolare il numero medio di collisioni necessarie a raggiungere l'equilibrio a energia kT conviene introdurre il *decremento logaritmico* $\ln E_0/E$ che ha valor medio ²⁷

$$\xi = \langle \ln \frac{E_0}{E} \rangle = \int_E^{E_0} \ln \frac{E_0}{E} \frac{dE}{(1 - \alpha)E_0} = -\frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \ln x \, dx = 1 - \frac{(A - 1)^2}{2A} \ln \frac{A + 1}{A - 1}$$

$\xi = 1$ per Idrogeno, $\xi \simeq 2/A$ per $A \gg 1$. Il numero medio di collisioni per moderare un neutrone di energia E_0 è

$$\bar{n} = \frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E}$$

Se $E_0 = 2 \text{ MeV}$ e $E = kT_{amb} = 25 \text{ meV}$ in diversi moderatori si ha

	H	D	He	C	O	...	U
ξ	1.0	0.73	0.43	0.16	0.12		0.084
\bar{n}	18	25	43	115	152		2170

Se v è la velocità dei neutroni, il numero di collisioni in un intervallo di tempo δt è $\frac{v \delta t}{\lambda_{el}}$, dove λ_{el} è il cammino libero medio per collisioni elastiche $\lambda_{el} = \frac{A}{N_o \rho \sigma_{el}}$. La sezione d'urto elastica dei neutroni dipende debolmente dall'energia, σ_{el} varia nell'intervallo $1 \div 5 \text{ barn}$ per i nuclei leggeri. Il numero di collisioni nell'intervallo di tempo dt in cui l'energia è diminuita di dE è

$$\frac{1}{\xi} d \ln \frac{E_0}{E} = -\frac{1}{\xi} \frac{dE}{E} = -\frac{2}{\xi} \frac{dv}{v} = \frac{v dt}{\lambda_{el}}$$

Integrando questa relazione si ha

$$-\int_{v_o}^v \lambda_{el} \frac{dv}{v^2} = \langle \lambda_{el} \rangle \frac{v_o - v}{v_o v} = \frac{\xi \Delta t}{2} \quad \Delta t = \frac{2 \langle \lambda_{el} \rangle}{\xi v} \quad \text{per } v_o \gg v$$

La velocità di neutroni con energia cinetica $E_0 = 2 \text{ MeV}$ è $v_o = 2.0 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ mentre la velocità di neutroni con $E = kT_{amb}$ è $v = 2.2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$. Il tempo per termalizzare neutroni energetici in acqua è $\Delta t \simeq 10^{-5} \text{ s}$ e aumenta notevolmente ($\sim \sigma_{el}/\xi$) nei moderatori con nuclei più pesanti.

Durante questo tempo i neutroni diffondono nel moderatore e in parte vengono assorbiti. La densità di neutroni ha una distribuzione gaussiana in funzione della distanza dal bersaglio e l'estensione della sorgente, Δr , dipende dalla sezione d'urto elastica, dalla sezione d'urto di assorbimento e dal decremento di energia $\ln E_0/E$. Per neutroni termici in acqua si ha $\Delta r \simeq 8 \text{ cm}$; Δr aumenta notevolmente con il

²⁷ $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$

peso atomico del moderatore. L'energia ha una distribuzione di Maxwell-Boltzmann alla temperatura del moderatore. I neutroni vengono inviati dalla sorgente alle aree sperimentali mediante *guide* cave con le pareti realizzate con opportuni materiali in cui i neutroni vengono trasmessi per riflessione totale (l'indice di rifrazione dei neutroni dipende dalla lunghezza d'onda $\lambda(E)$ e dalla ampiezza di diffusione elastica $f(E)$ con le pareti della guida).

In esperimenti in cui i neutroni vengono diffusi in modo elastico la velocità viene misurata dopo il campione in esame dal tempo di volo dei neutroni prendendo come riferimento l'istante in cui il fascio di protoni urta il bersaglio della sorgente. Se L è la distanza tra il bersaglio e l'esperimento, l'errore nella misura della velocità dipende dal tempo di termalizzazione, Δt , e dall'estensione della sorgente, Δr ,

$$\Delta v = v \left[\left(\frac{\Delta r}{L} \right)^2 + \left(\frac{v \Delta t}{L} \right)^2 \right]^{1/2}$$

se $\Delta r = 10 \text{ cm}$, $\Delta t = 10 \mu\text{s}$ per neutroni termici e $L = 10 \text{ m}$, si ha $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{v} \simeq 10^{-2}$.

1.4 Interazioni tra particelle e materia

Le particelle cariche nell'attraversare i materiali sono soggette a interazioni elettromagnetiche con gli elettroni e i nuclei atomici. A causa di queste interazioni le particelle perdono parte dell'energia cinetica e cambiano direzione. I principali effetti sono

- perdita di energia per ionizzazione ed eccitazione degli atomi;
- diffusione coulombiana nel campo dei nuclei atomici;
- irraggiamento nel campo dei nuclei atomici.

La radiazione elettromagnetica può convertire parte o tutta la sua energia per interazione con gli atomi e i nuclei atomici. I principali effetti sono

- effetto fotoelettrico;
- effetto Compton;
- produzione di coppie elettrone-positrone.

Questi effetti, che verranno trattati in modo approssimato, sono importanti per studiare le tecniche di rivelazione di particelle cariche e di fotoni e per capire come vengono effettuati gli esperimenti nel campo della fisica nucleare e subnucleare.